

Untersuchungen über den Einfluss von  
Neutralgas auf die Dynamik der Theta-  
pinch-Entladungen.

D. Düchs

IPP 1/14

IPP 6/10

Oktober 1963

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

Inhaltsverzeichnis

## GARCHING BEI MÜNCHEN

1) Zusammenfassung

2) Theorie der Theta-Pinch-Entladung mit Neutralgas

Untersuchungen über den Einfluss von  
Neutralgas auf die Dynamik der Theta-  
pinch-Entladungen.

3) Auswertung der Experimente

4) Literatur

D. Düchs

5) Dreiflüssigkeitmodell mit einer neutralen Komponente

1) Grund IPP 1/14 1963 S. 9

2) Anwe IPP 6/10 zur Dreiflüssigkeit Oktober 1963 S. 13

3) Folgerungen aus den Maxwell'schen Gleichungen S. 18

4) Stoßfront S. 22

5) Zusammenstellung mit Druckkurve der Stoß-  
fronten: Theorie, Messung, Kalibration, Per-  
foration, Beobachtung, Interpretation, Vergleich,  
Literatur der Widerstände, Literaturhinweise

6) Zusammenstellung mit Druckkurve der Stoß-  
fronten: Theorie, Messung, Kalibration, Per-  
foration, Beobachtung, Interpretation, Vergleich,  
Literatur der Widerstände, Literaturhinweise

7) Zusammenstellung mit Druckkurve der Stoß-  
fronten: Theorie, Messung, Kalibration, Per-  
foration, Beobachtung, Interpretation, Vergleich,  
Literatur der Widerstände, Literaturhinweise

8) Zusammenstellung mit Druckkurve der Stoß-  
fronten: Theorie, Messung, Kalibration, Per-  
foration, Beobachtung, Interpretation, Vergleich,  
Literatur der Widerstände, Literaturhinweise

6) Zweiflüssigkeitmodell des Theta-Pinch-Systems

1) Linearsystem S. 60

2) Differenzgleichungen S. 62

3) Randbedingungen S. 75

4) Numerisches Lösungsverfahren S. 80

5) Beschränkung des Zeitintervalls S. 81

6) Zusammenfassung der Ergebnisse S. 82

7) Literatur S. 82

8) Fortschrittbericht und Zusammenfassung S. 83

B) Ergebnisse S. 84

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Literatur

## Inhaltsverzeichnis

### Zusammenfassung

- A) Messung des Magnetfeldes am Thetapinch mit Mehrfachsonden
- I) Thetapinch-Anlage S. 1
  - II) Magnetfeldsonde S. 3
  - III) Auswertung der SONDENSIGNALE, Eichung der Sonden S. 5
- B) Dreiflüssigkeitsmodell mit einer neutralen Komponente
- I) Grundgleichungen S. 9
  - II) Anwendung auf ein Dreikomponentengas S. 13
  - III) Folgerungen aus den Maxwell'schen Gleichungen S. 18
  - IV) Stoßterme S. 22
  - V) Zusammenstellung und Berechnung der Koeffizienten (Stoßquerschnitte, Ionisation, Rekombination, Reibung, Temperaturlausgleich, elektrischer Widerstand, Reibungswärme) S. 27
  - VI) Zusammenstellung des Gleichungssystems S. 55
- C) Numerische Lösung des Gleichungssystems
- I) Einheitensystem S. 60
  - II) Differenzgleichungen S. 62
  - III) Randbedingungen S. 76
  - IV) Bewegliches Koordinatennetz S. 80
  - V) Beschränkungen für den Zeitschritt S. 81
  - VI) Lösungsfolge für das gesamte Gleichungssystem S. 82
  - VII) Fortran-programm und Laufschemata S. 83
- D) Ergebnisse S. 84
- E) Einige noch offene Probleme S. 90

### Literatur

## Zusammenfassung

Die Arbeit zielte darauf ab, den Einfluß der elektrisch neutralen Gaskomponente bei schnellen, stromstarken Gasentladungen zu untersuchen.

Dazu wurde im Entladungsrohr eines  $\theta$ -Pinch das Magnetfeld - räumlich und zeitlich aufgelöst - gemessen, und zwar in den Anfangsstadien, wo der Ionisierungsgrad noch niedrig ist. Ein Dreiflüssigkeitsmodell für ein Gemisch aus Elektronen, Ionen und neutralen Atomen führt auf ein Gleichungssystem zur Berechnung der Entladung. Die verwendeten Koeffizienten gelten für ein Wasserstoffplasma. Das System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen wurde numerisch gelöst auf einer IBM-7090-Rechenmaschine. Es liefert die Plasma- (Elektronen- und Ionen-)dichte, die Dichte der Atome, die Plasma- und die Neutralgasgeschwindigkeiten, die Temperatur der Elektronen, der Ionen und der Neutralteilchen und schließlich das Magnetfeld als Funktionen einer Raumkoordinate und der Zeit.

Für mehrere Sätze von Anfangswerten sind die Resultate der Rechnungen angegeben und mit den Ergebnissen der Magnetfeldmessungen verglichen.

A) Messung des Magnetfeldes am Thetapinch mit Mehrfachsonden

I) Thetapinch-Anlage

Einen Thetapinch kann man vereinfacht folgendermaßen kennzeichnen: Eine Spule mit einer Windung umschließt ein Rohr, das mit Gas von niederem Druck gefüllt wird. Über diese Spule wird eine Hochspannungs-Kondensatorbatterie entladen. Das dabei innerhalb der Spulenwindung rasch ansteigende, starke, axiale Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld, welches das Gas zündet. Das entstehende Plasma wird durch das Magnetfeld zur Achse komprimiert und führt dann einige "Kompressions-schwingungen" aus, wie sie Abb. 2 zeigt.

Eine detaillierte Beschreibung der Thetapinch-Anlage, an der die Messungen ausgeführt wurden, findet man in [1] und [2]. In Tabelle 1 sind nur die wichtigsten Daten zusammengestellt.

Tab. 1: Hauptentladung

Ladespannung U	40 kV
Kapazität C	33 $\mu$ F
Energieinhalt $1/2 C \cdot U^2$	26 kJ
Max. Änderung des Magnetfeldes $\dot{B}$ (ohne Plasma)	$6 \cdot 10^{10}$ T/sec
Schwingungsdauer $T_0$	$6,22 \cdot 10^{-6}$ sec
Dämpfungsfaktor $\delta$	$5,51 \cdot 10^4$ sec <sup>-1</sup>
Gesamtinduktivität aus	

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \delta^2} \quad (\text{ohne Plasma}) \quad 29,55 \text{ nHy}$$

Spulenlänge		300 mm
	außen	140 mm
Spulendurchmesser:		
	innen	54 mm
Entladungsrohrdurchmesser (innen)		47 mm

Um zu Beginn der Hauptentladung ein möglichst genau bestimmtes Magnetfeld zu haben, wird vorher in der Spule ein quasistationäres (verglichen mit den Schwingungsdauern der übrigen Kreise) Feld erzeugt durch eine Kondensatorbatterie von hoher Kapazität bei niedrigerer Spannung. Ihre Daten sind in Tabelle 2 angegeben.

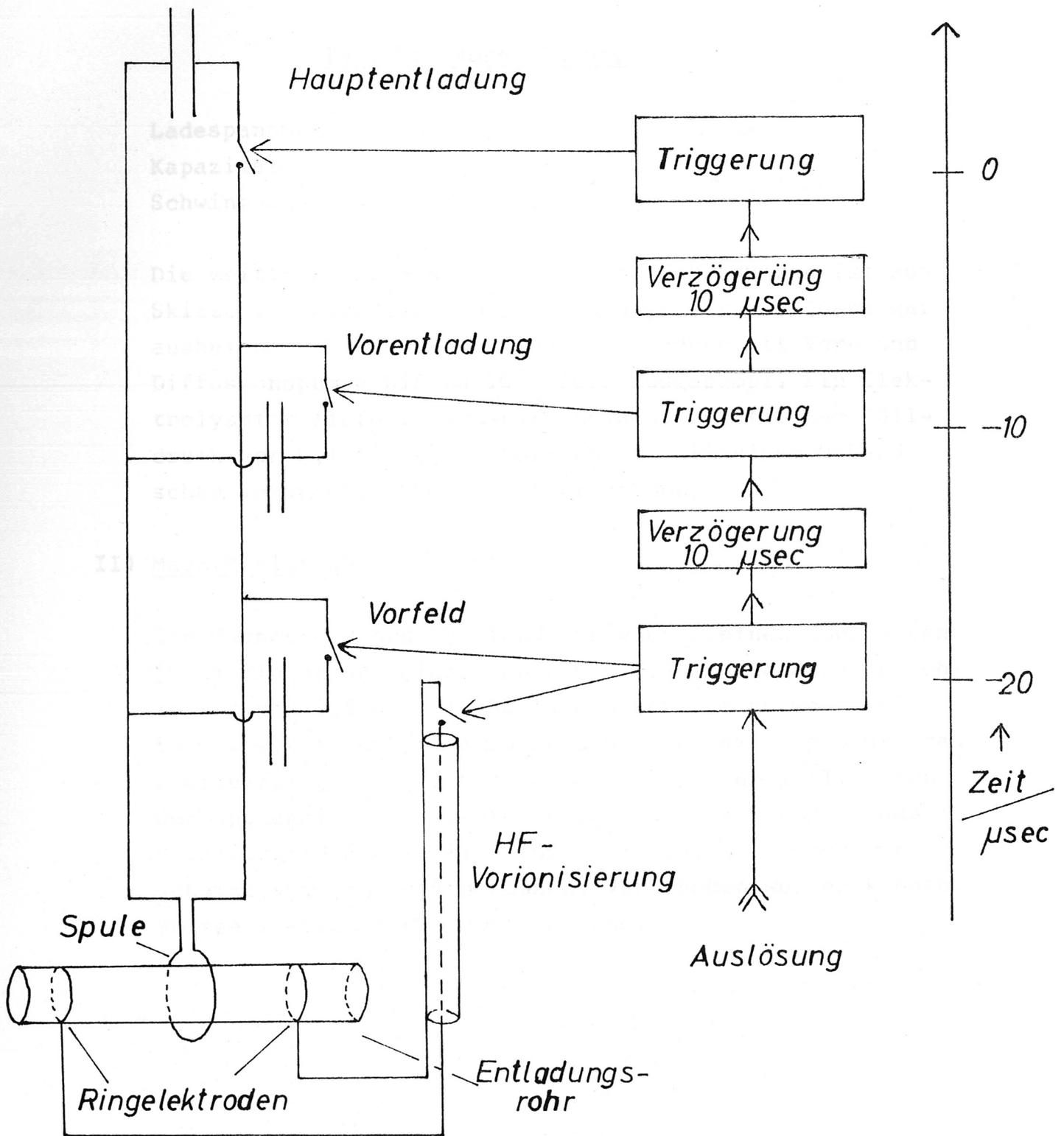
Tab. 2: Vorbatterie

Ladespannung	2,5 kV
Kapazität	1296 $\mu\text{F}$
Schwingungsdauer	$251 \cdot 10^{-6}$ sec
Dämpfungsfaktor	$1,45 \cdot 10^3$ sec <sup>-1</sup>

Da die Hauptentladung schon in der ersten Halbschwingung des Magnetfeldes zünden sollte, war eine Vorionisierung des Füllgases notwendig. Dazu dient einmal eine hochfrequente Kabelentladung zwischen zwei Ringelektroden, die außerhalb der Spule um das Rohr gelegt sind. Zum zweiten entlädt sich vor dem Einschalten der Hauptbatterie ein kleinerer Kondensator über die Spule.

Tab. 3: Hochfrequente Vorionisierung

Ladespannung	40 kV
Kapazität	60-Ohm-Kabel und Ringelektroden
Schwingungsdauer	ca. $10^{-7}$ sec



Skizze 1

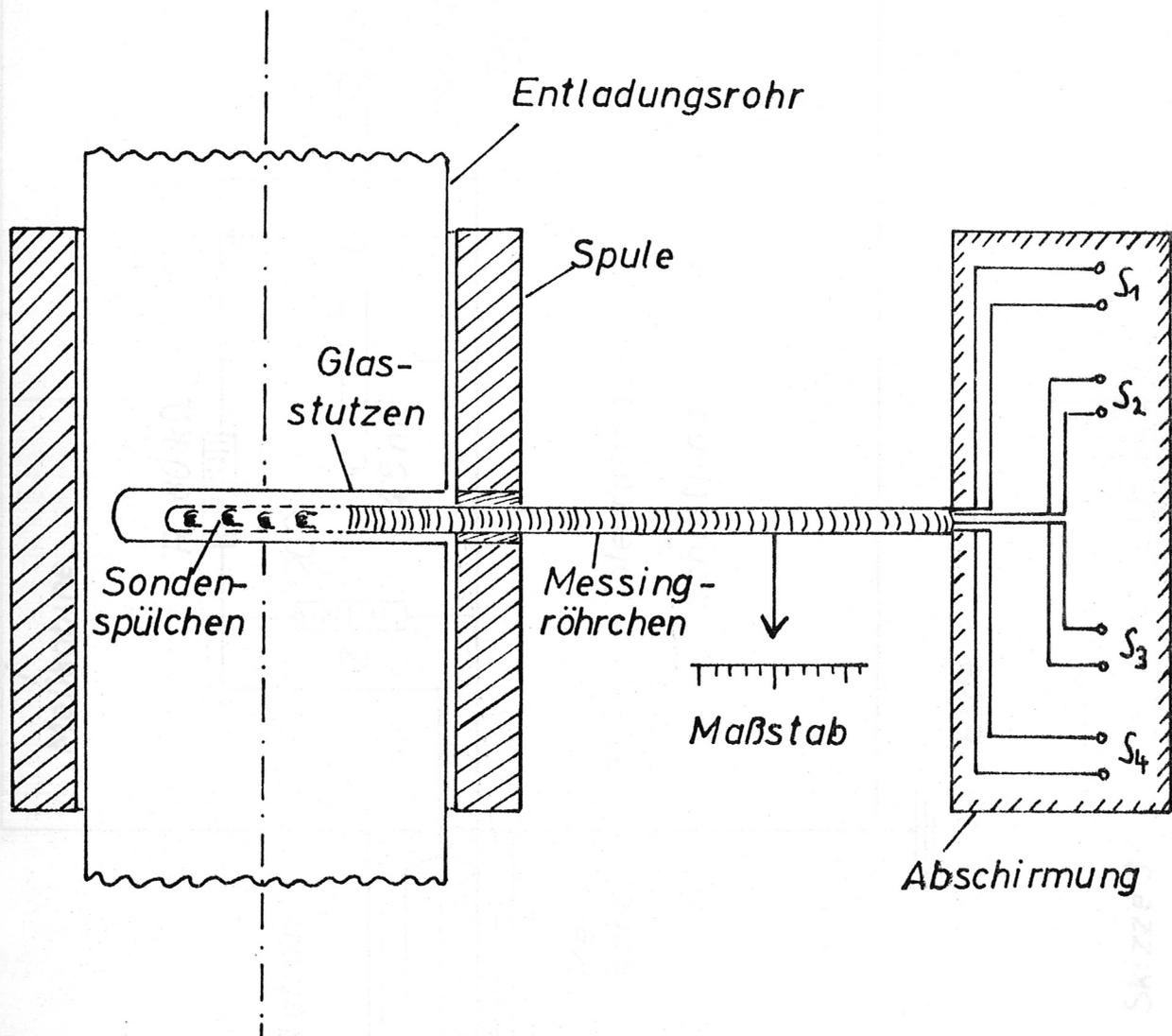
Tab. 4: Vorentladung

Ladespannung	20 kV
Kapazität	1 $\mu\text{F}$
Schwingungsdauer	ca. $2 \cdot 10^{-6}$ sec

Die zeitliche Reihenfolge der vier Entladungen ist aus Skizze 1 ersichtlich. Das Entladungsrohr aus Quarz war ausheizbar. Es wurde vor jeder Entladung mit Vor- und Diffusionspumpe bis zu  $10^{-6}$  Torr ausgepumpt. Ein Elektrolysator lieferte den Füllungswasserstoff. Der Fülldruck von 0,1 ( $\pm$  0,005) Torr konnte mit einem McLeod-schen Vakuummeter kontrolliert werden.

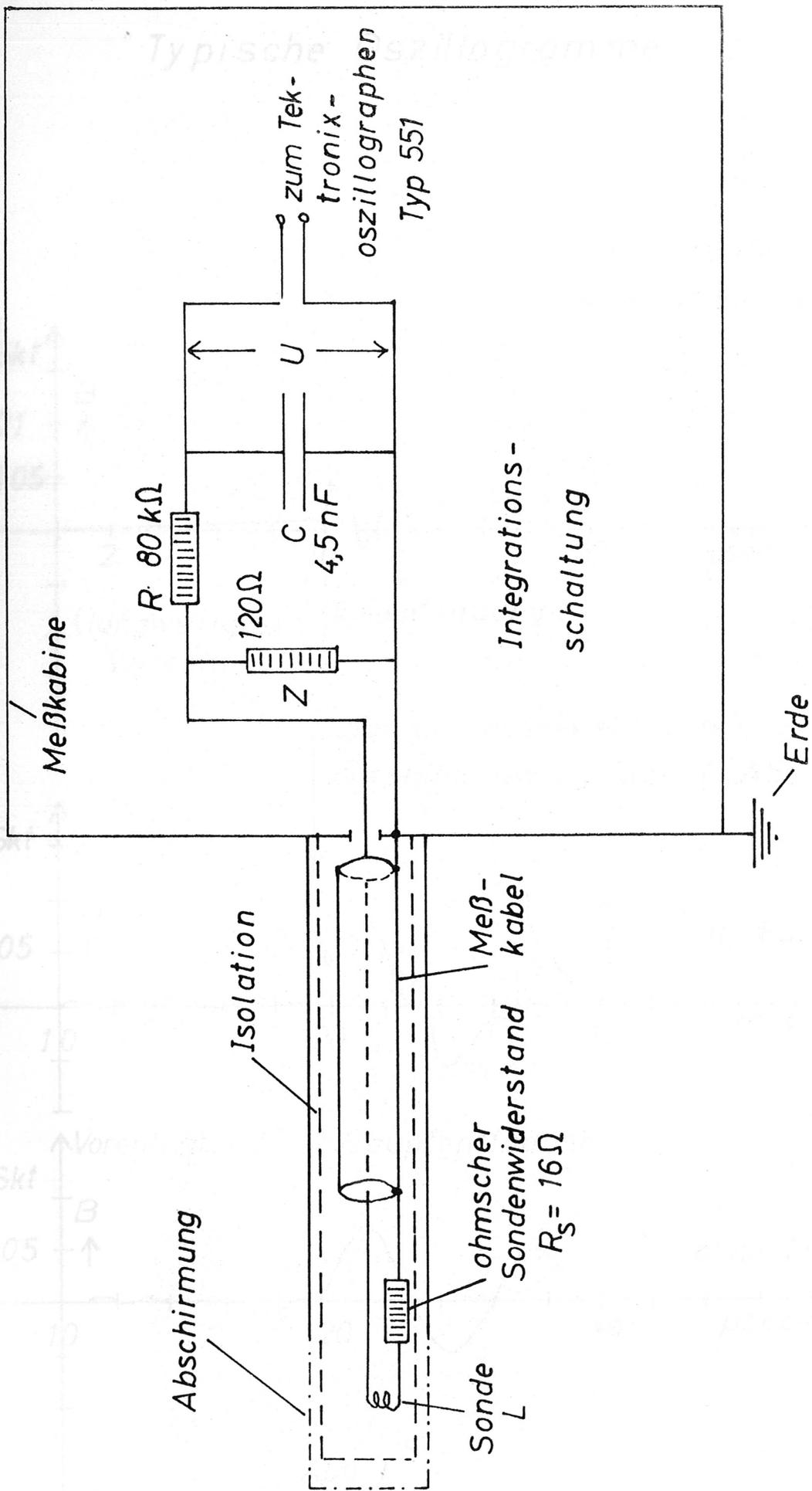
## II) Magnetfeldsonde

Die Magnetfeldsonde bestand aus vier kleinen Spulen von je 14 Windungen, einer Länge von 0,6 mm und einem Durchmesser von 0,8 mm. In Abständen von 2,5 mm waren sie in ein vorne geschlitztes Messingröhrchen eingebaut, das gleichzeitig elektrische Felder abschirmen sollte. Von der Spulenmitte aus ragte in radialer Richtung in das Entladungsgefäß ein Glasstutzen, in dem die Sonde, geschützt vor dem heißen Plasma, verschoben werden konnte. Skizze 2 ergänzt die Beschreibung.



Skizze 2

Jede Sondenspule erforderte einen Meßkreis, wie ihn Skizze 3 verdeutlicht. Wegen der starken Störfelder (durch Schaltfunkenstrecken und Entladung) war eine gute Abschirmung aller Meßkabel (durch Kupferschläuche) und eine Meßkabine notwendig. Der IPP-Bericht [ 3 ] behandelt die Bestandteile im einzelnen. Die Sonden-signale wurden mit Oszillographen registriert. Die Abbildungen 1 und 2 enthalten Beispiele für "Sondenkurven" ( $\cong$  zeitlich integrierte  $\dot{L}$ -Signale).



Skizze 3

# 01 Typische Oszillogramme

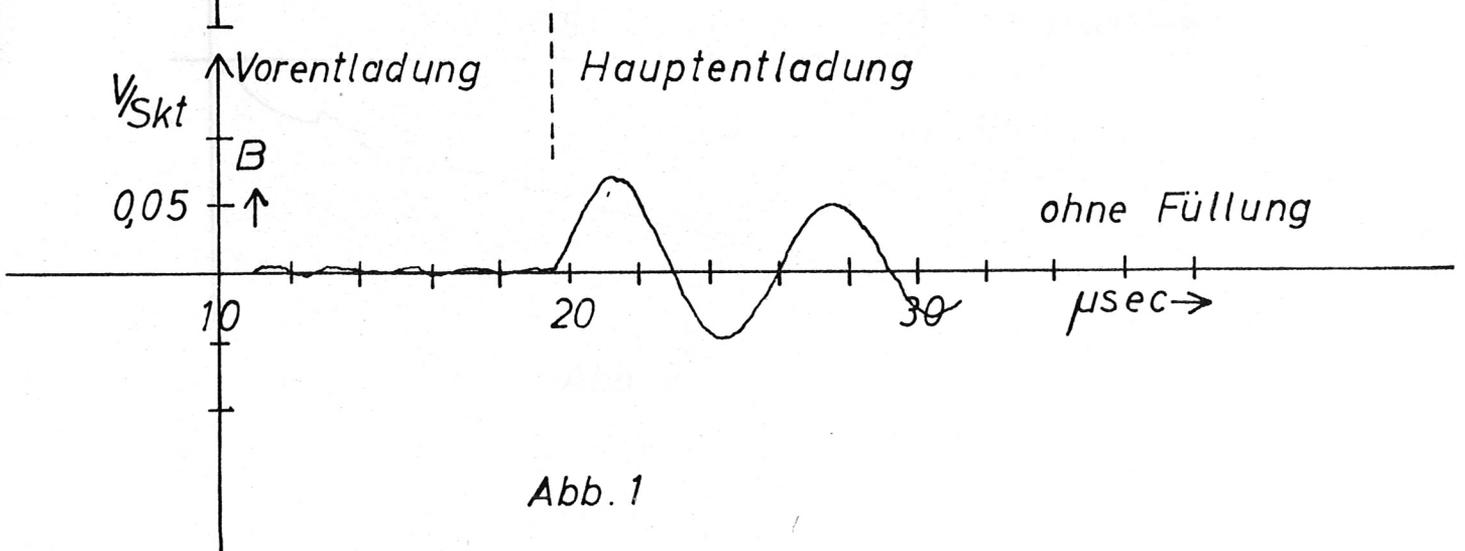
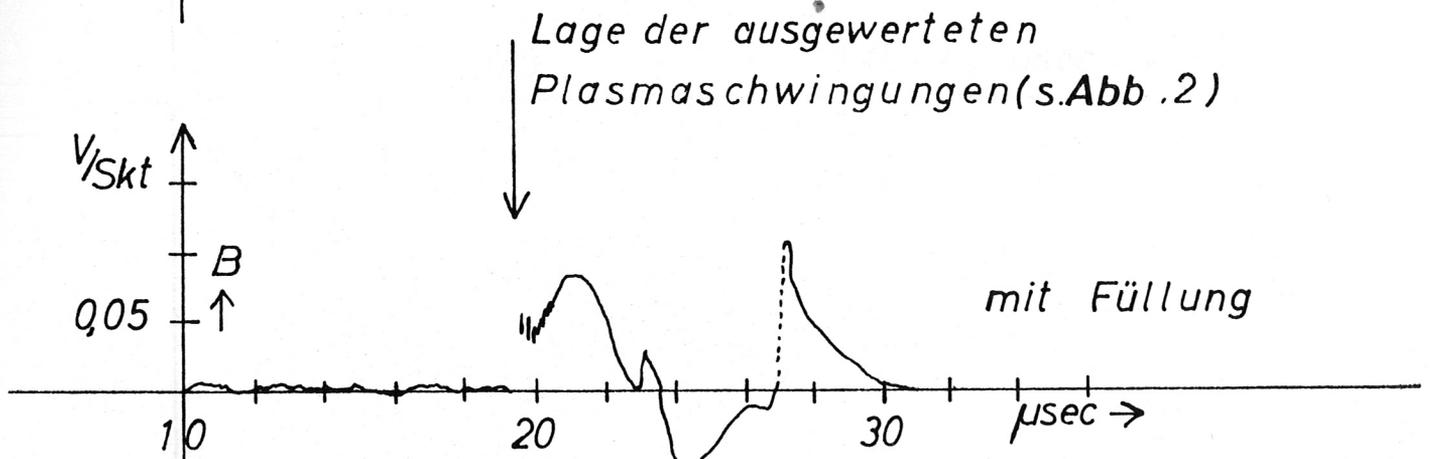
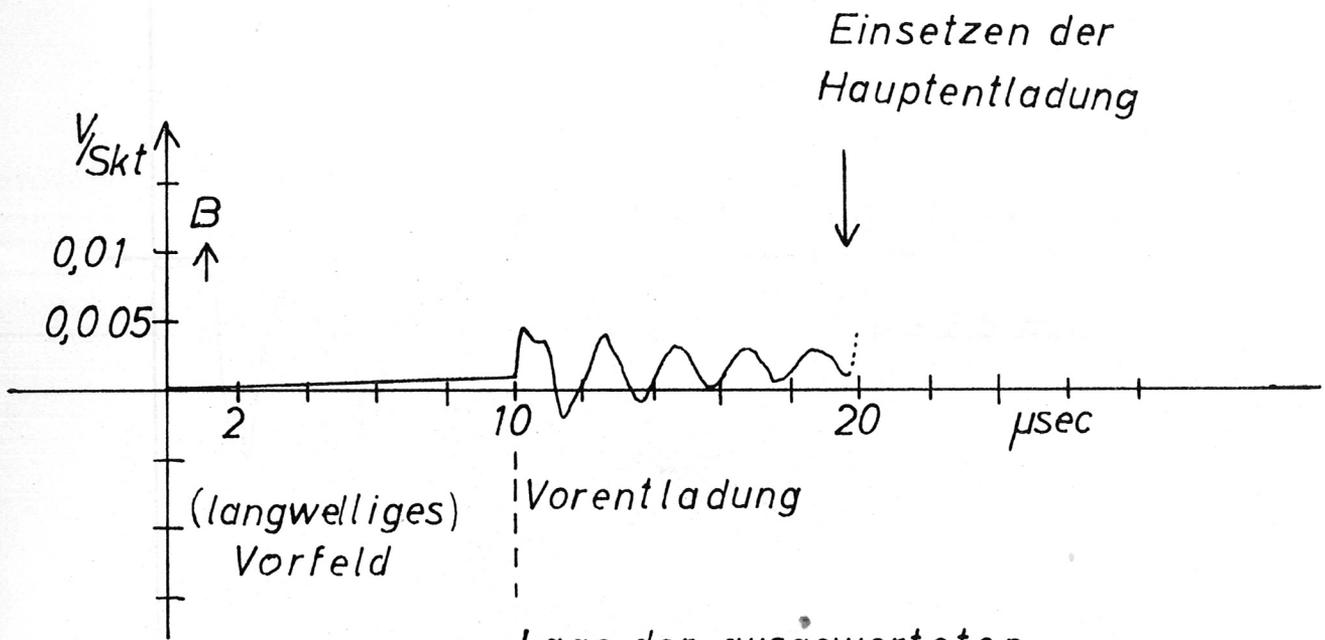


Abb. 1

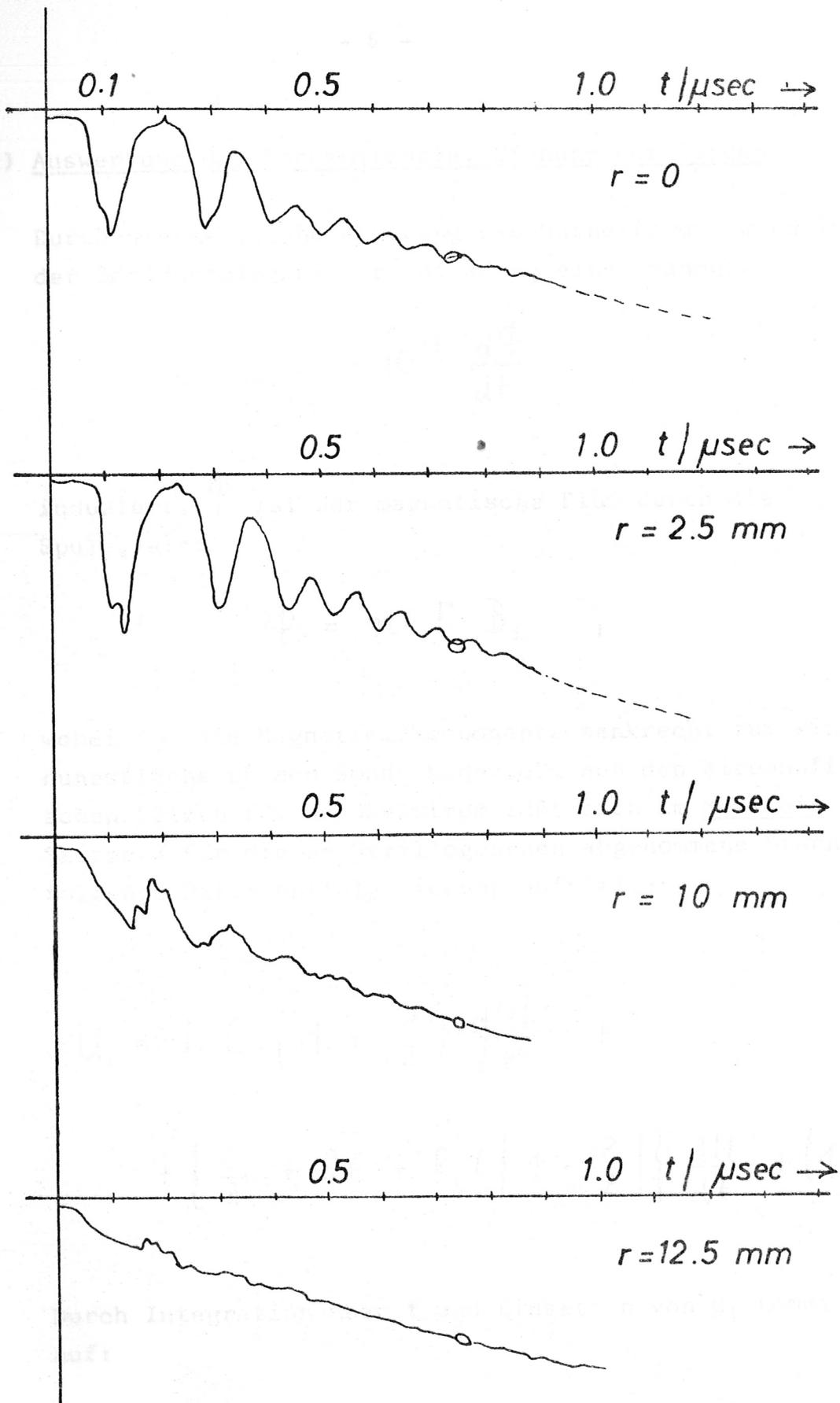


Abb. 2

### III) Auswertung der Sondensignale, Eichung der Sonden

Durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes wird in der Sondenspule bei der Entladung eine Spannung

$$U_i = - 10^{-8} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

induziert.  $\Phi$  ist der magnetische Fluß durch die Spule, also

$$\Phi = n \cdot F \cdot B_{\perp} \quad ,$$

wobei  $B_{\perp}$  die Magnetfeldkomponente senkrecht zur Windungsfläche  $nF$  der Sonde bedeutet. Aus den Kirchhoffschen Sätzen für Wechselstrom läßt sich im Meßkreis der Skizze 3 für die am Oszillographen abgenommene Spannung  $U$  folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$U_i = L \cdot C \cdot \left( 1 + \frac{R}{Z} \right) \frac{d^2 U}{dt^2} + \left\{ \frac{L}{Z} + R \cdot C + R_s \cdot C \cdot \left[ 1 + \frac{R}{Z} \right] \right\} \cdot \frac{dU}{dt} + \left( 1 + \frac{R_s}{Z} \right) \cdot U .$$

Durch Integration über  $t$  und Einsetzen von  $U_i$  kommt man auf:

$$B = \frac{L \cdot C \cdot \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \cdot \frac{dU}{dt} + \left(R \cdot C + R_s \cdot C \cdot \left[1 + \frac{R}{Z}\right] + \frac{L}{Z}\right) \cdot U + \left(1 + \frac{R_s}{Z}\right) \cdot \int U dt}{10^{-8} \cdot n \cdot F}$$

In dieser Gleichung wird L in Henry, C in Farad, U in Volt, Z, R, R<sub>s</sub> in Ohm, F in cm<sup>2</sup> und B in Gauß eingesetzt.

Geeignete Dimensionierung des Meßkreises - etwa wie in Skizze 3 angegeben - machen den ersten Summanden und  $\frac{L}{Z}$  vernachlässigbar klein. Das Integralglied kann einen Beitrag bis zu einigen Prozenten liefern (und wurde deshalb bei der Auswertung berücksichtigt). Die endgültige Formel lautet somit im vorliegenden Fall:

$$B = \frac{\left(R \cdot C + R_s \cdot C \cdot \left[1 + \frac{R}{Z}\right]\right) \cdot U + \left(1 + \frac{R_s}{Z}\right) \cdot \int U dt}{10^{-8} \cdot n \cdot F}$$

Eine zweite, davon unabhängige Formel für B zur Eichung, gewinnt man aus den Daten des Entladungskreises. Für einen Achsenpunkt in der Mitte einer Spule kann man das Magnetfeld berechnen zu

$$B = 0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{J}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}$$

n = Windungszahl, J = Strom in Ampère, l = Spulenlänge in cm, R = Spulenradius in cm.

Für  $J$  setzt man an:

$$J = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t = \frac{U_0 \cdot C \cdot 2\pi}{T_0} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t,$$

mit  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ , wenn  $\delta$  klein ist.

Im ersten Maximum der Schwingung ist  $\sin \omega t_{\text{Max}} = 1$ ,  
so daß sich hier für die Feldstärke ergibt:

$$B = 0,4 \cdot \pi \cdot \frac{n}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \cdot 2\pi \cdot U_0 \cdot C \cdot \frac{e^{-\delta t_{\text{Max}}}}{T_0}$$

Praktisch wurden nun zwischen den einzelnen Messungen mit Plasma immer wieder Entladungen ohne Gasfüllung aufgenommen, für das erste Maximum der Signale das B-Feld nach beiden Methoden berechnet und dadurch die Sonden spulen geeicht.

Die beiden unabhängigen Eichungen stimmten recht gut überein. Auch die Streuung bei verschiedenen Entladungen blieb minimal.

Die Meßergebnisse sind mit den Resultaten der Theorie im Abschnitt D der Arbeit zusammengefaßt.

B) Dreiflüssigkeitsmodell mit einer neutralen Komponente

Mit den Sondenmessungen wurden hauptsächlich die Anfangsvorgänge bei der Entladung untersucht. In diesem Zeitbereich ist (trotz Vorionisierung) nur ein Teil des Füllgases ionisiert, was optische Messungen beweisen. Es erscheint daher notwendig, bei der theoretischen Behandlung dieser Vorgänge die neutrale Gaskomponente zu berücksichtigen.

K. Hain [4] und andere beschrieben erfolgreich ein vollionisiertes Plasma durch Mehrflüssigkeitsmodelle. Falls die mittlere freie Weglänge der neutralen Atome gegenüber den Gefäßdimensionen klein ist, kann man auch das Neutralgas als Flüssigkeit behandeln. Für die mittlere freie Weglänge

$$\bar{l} \approx \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n \cdot 4 \cdot r^2}$$

errechnet man für H ( $r \approx 1,2 \cdot 10^{-8}$  cm) bei  $n = 5 \cdot 10^{15}$  cm<sup>-3</sup> ( $n = 7 \cdot 10^{15}$  cm<sup>-3</sup> entspricht dem Fülldruck)

$$\bar{l} \approx 0,8 \text{ mm.}$$

Der Gefäßdurchmesser beträgt 47 mm.

Im folgenden werden nun die Gleichungen für ein Dreiflüssigkeitsmodell (mit Elektronen, Ionen und neutralen Atomen als Komponenten) aufgestellt.

I) Grundgleichungen

In einem vollionisierten Plasma bleibt für jede Komponente einzeln die Teilchenzahl konstant. Dieser Umstand wird zur Vereinfachung von Bewegungs- und Temperaturgleichungen benutzt. Spielen jedoch Ionisation und Rekombination eine Rolle, so müssen alle diese Gleichungen ohne derartige Vereinfachung neu abgeleitet werden.

Den Ausgangspunkt dazu bildet die "Gleichung für die Änderung molekularer Eigenschaften" (s. [5]!):

$$\begin{aligned} \frac{D(n\bar{\varphi})}{Dt} + n \cdot \bar{\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathcal{W} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot n \cdot \varphi \bar{\mathcal{L}} - \\ - n \cdot \left\{ \overline{\frac{D\varphi}{Dt}} + \bar{\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left[ \overline{\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} (\varphi f)} - \frac{D\mathcal{W}}{Dt} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}} \right] - \right. \\ \left. - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}} \mathcal{L}} : \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{W} \right\} = \int \varphi \frac{\partial_e}{\partial t} f \cdot d^3 \vec{c} \quad (1) \end{aligned}$$

Man gewinnt diese Gleichung durch Multiplikation der Moleküleigenschaft  $\varphi(\vec{c})$  mit der Boltzmann-Gleichung und nachfolgender Integration über den Geschwindigkeitsraum. Der Querstrich (z.B.  $\bar{\varphi}$ ) deutet die dabei erfolgende Mittelung an.

$\vec{c}$  = Einzelgeschwindigkeit der Teilchen.

$\vec{c}$  wird aufgespalten in  $\vec{c} = \mathcal{L} + \mathcal{W}$ , wobei  $\mathcal{W} = \frac{\sum \vec{c}}{n \cdot d^3\mathcal{V}}$

die mittlere Geschwindigkeit des Gases am Punkt  $\mathcal{V}$  im Volumen  $d^3\mathcal{V}$  bedeutet.  $\mathcal{L}$  ist dann die Geschwindigkeit relativ zu einem System, das sich mit  $\mathcal{W}$  bewegt.

$n$  = Teilchenzahl pro  $\text{cm}^3$ .

$\mathcal{f}$  = äußere Beschleunigung von geschwindigkeitsunabhängigen Kräften oder der Lorentzkraft.

Ein Punkt zwischen den Vektoren bedeutet Bildung des Skalarproduktes, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \cdot \mathcal{W} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z = \text{div } \mathcal{W} .$$

Nebeneinanderstehende Vektoren (ohne Punkt!) bilden einen Tensor, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \mathcal{W} = \text{grad } \mathcal{W} .$$

Doppelpunkt zwischen Tensoren heißt doppeltes Tensorprodukt:

$$A : B = \sum_i \sum_k A_{ik} B_{ki} .$$

$\frac{D}{Dt} = : \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{W} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{W} \cdot \text{grad}$  ist die substantielle Zeitableitung.

Im Stoßterm  $\int \varphi \frac{\partial_c}{\partial t} f d^3\vec{c}$  bestimmt  $\frac{\partial_c}{\partial t} f d^3\vec{c} \cdot (d^3\mathcal{V} \cdot dt)$

die Änderung der Molekülzahl im Phasenraumvolumen  $d^3\vec{c} \cdot d^3\mathcal{V}$  bei  $\mathcal{V}$  und  $\vec{c}$  zur Zeit  $t$  im Zeitintervall  $dt$  durch Stöße.

$f$  = Verteilungsfunktion.

a) Kontinuitätsgleichung

$\varphi$  wird konstant (gleich 1) gesetzt. Die zugelassenen Beschleunigungen  $F$  sind entweder gänzlich oder gerade von den Geschwindigkeitskomponenten unabhängig, nach denen differenziert werden muß. Nennt man den Stoßterm  $\Delta n$ , so folgt aus (1):

$$\frac{Dn}{Dt} + n \cdot \text{div } \mathcal{V} = \Delta n. \quad (2)$$

b) Impulsgleichung

Wegen der späteren Berechnung des Stoßtermes  $\Delta P$  wird nun für  $\varphi(\vec{c})$  der Gesamtimpuls  $m\vec{c} = m(\vec{L} + \mathcal{V})$  eingesetzt. Dann gilt für die x-Komponente:

$$\bar{\varphi} = m \mathcal{V}_x ;$$

$$n \cdot \overline{\varphi \vec{L}} = n \cdot m \cdot (\overline{L_x \vec{L} + \mathcal{V}_x \vec{L}}) = \beta_x + n \cdot m \cdot \mathcal{V}_x \bar{L} = \beta_x \quad (\text{Druck!});$$

$$\frac{D\bar{\varphi}}{Dt} = m \cdot \frac{D\mathcal{V}_x}{Dt} ;$$

$$m \cdot \overline{L_x} \cdot \frac{\partial(\mathcal{V}_x + L_x)}{\partial \mathcal{H}} = \underbrace{m \cdot \bar{L}_x}_{=0} \cdot \frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial \mathcal{H}} + \underbrace{m \cdot L_x}_{=0} \cdot \frac{\partial L_x}{\partial \mathcal{H}} = 0 .$$

Mit den übrigen Komponenten erhält man sofort aus (1):

$$\frac{D(n \cdot m \cdot \mathcal{W})}{Dt} + n \cdot m \cdot \mathcal{W} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathcal{P} = \Delta P + n \cdot m \cdot f.$$

Differenziert man den ersten Term aus und setzt Gleichung (2) ein, so ergibt sich:

$$n \cdot m \cdot \frac{D\mathcal{W}}{Dt} + m \cdot \mathcal{W} \cdot \Delta n = - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathcal{P} + \Delta P + n \cdot m \cdot f.$$

Ist nur skalarer Druck  $p$  zugelassen, folgt endlich:

$$n \cdot m \cdot \frac{D\mathcal{W}}{Dt} = - m \cdot \mathcal{W} \cdot \Delta n - \text{grad} p + \Delta P + n \cdot m \cdot f. \quad (3)$$

c) Gleichung für die Temperatur

$\varphi$  wird gleich der "inneren" kinetischen Energie  $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$  gesetzt. Dann ist  $\overline{\varphi} = \frac{3}{2} kT$  (drei Freiheitsgrade),  
 $n \cdot \frac{m}{2} \overline{v^2} = \vec{q}$  (Wärmeflußvektor),

$$\frac{m}{2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = m \cdot \overline{v^2} = \frac{p}{n}.$$

Mit dem Stoßterm  $\Delta E$  gewinnt man aus (1):

$$\frac{D(n \cdot \frac{3}{2} kT)}{Dt} + n \cdot \frac{3}{2} \cdot kT \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \varpi + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{q} + p; \frac{\partial \varpi}{\partial x} = \Delta E .$$

Nach Ausdifferenzieren der Zeitableitung, bei skalarem Druck  $p$ , mit Gleichung (2) und mit

$$\vec{q} = -\kappa \cdot \text{grad} T ,$$

ist schließlich

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{D(kT)}{Dt} + \frac{3}{2} kT \cdot \Delta n = \\ -p \cdot \text{div} \varpi + \Delta E + \text{div}(\kappa \text{ grad} T) . \end{aligned} \quad (4)$$

## II) Anwendung auf ein Dreikomponentengas

Mit Hilfe der Gleichungen (2), (3) und (4) wird nun ein Gleichungssystem für ein Gemisch aus Elektronen (Index "e"), Ionen (Index "i") und neutralen Atomen (Index "o") aufgebaut.

Wichtige Annahmen, die für das Folgende gemacht werden, sind:

1. Gültigkeit der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = n k T ;$$

2. Quasineutralität (in Raum und Zeit)

$$Z \cdot n_i = n_e = n ;$$

3. Einfache Ionisation

$$Z = 1 \quad (H \rightarrow H^+ + e^-);$$

4. Die Elektronenmasse ( $m_e = 9,107 \cdot 10^{-28}$  g) wird gegen die Ionenmasse ( $m_+ = 1,672 \cdot 10^{-24}$  g) vernachlässigt;
5. Zylindersymmetrie<sup>H+</sup> des gesamten Problems.

Die Berechtigung zu diesen Voraussetzungen wird hier nicht nachgeprüft.

Da die Abnahme der Neutralgasteilchen gleich der Zunahme der Ionen (nach 3.) und auch der Elektronen -und umgekehrt- ist, gilt nach (2) für jeden Bestandteil:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \text{div } n_0 v_0 = - \Delta n \quad , \quad (5)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } n_i v_i = \Delta n \quad , \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div } n_e v_e = \Delta n \quad . \quad (7)$$

In (3) wird für Elektronen (-) und für Ionen (+)

$$m \cdot n \cdot \mathcal{F} = \pm n \cdot e \left( \mathcal{E} + \frac{v \times \mathcal{L}_0}{c} \right) \quad \text{gesetzt:}$$

$$n_0 m_0 \cdot \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \cdot \text{grad } v_0 \right) - m_0 \cdot n_0 \cdot \Delta n = - \text{grad} (n_0 k T_0) + \Delta P_0 \quad , \quad (8)$$

$$n_i \cdot m_i \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial t} + \mathcal{N}_i \cdot \text{grad} \mathcal{N}_i \right) + m_i \mathcal{N}_i \cdot \Delta n =$$

(9)

$$= - \text{grad} (n_i k T_i) + n_i \cdot e \left( \mathcal{E} + \frac{\mathcal{N}_i \times \mathcal{L}}{c} \right) + \Delta P_i ,$$

$$n_e \cdot m_e \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{N}_e}{\partial t} + \mathcal{N}_e \cdot \text{grad} \mathcal{N}_e \right) + m_e \mathcal{N}_e \cdot \Delta n =$$

(10)

$$= - \text{grad} (n_e k T_e) - n_e \cdot e \left( \mathcal{E} + \frac{\mathcal{N}_e \times \mathcal{L}}{c} \right) + \Delta P_e .$$

Für das Plasma (Elektronen und Ionen) werden nun statt  $\mathcal{N}_i$ ,  $\mathcal{N}_e$  eingeführt (vgl. [6]!):

$$\mathcal{N} = \frac{m_i \mathcal{N}_i + m_e \mathcal{N}_e}{m_i + m_e} ,$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_e , \text{ bzw. } j = e \cdot n \cdot (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_e) .$$

Multipliziert man jetzt (6) mit  $m_i$  und (7) mit  $m_e$  und addiert, so folgt (mit  $n_i = n_e$ ):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathcal{N} \cdot \text{grad} n + n \cdot \text{div} \mathcal{N} = \Delta n . \quad (11)$$

Die Differenz von (6) und (7) lautet:

$$\operatorname{div} (n \cdot \{ \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_e \}) = 0. \quad (12)$$

Führt man Zylinderkoordinaten ein, dann sind wegen der vorausgesetzten Symmetrie alle Ableitungen nach der z- und  $\varphi$ -Koordinate gleich Null. Ist  $\mathcal{N}_j = \{ v_{rj}, v_{\varphi j}, v_{zj} \}$ , ( $j = i, e$ ), dann lautet die Gleichung (12):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot n \cdot [v_{ri} - v_{re}]) = 0.$$

r bleibt endlich, d.h.

$$r \cdot n \cdot (v_{ri} - v_{re}) = \text{const. (bzgl. } r)$$

Für die Differenz und n muß auch für  $r = 0$  Stetigkeit verlangt werden, so daß const = 0, und damit gilt:

$$v_{ri} = v_{re} = \frac{m_i v_{ri} + m_e v_{re}}{m_i + m_e} = v_r. \quad (13)$$

Bei Addition der Impulsgleichungen (9) und (10) gewinnt man:

$$\begin{aligned} n \cdot (m_i + m_e) \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{(m_i \mathcal{N}_i + m_e \mathcal{N}_e)}{m_i + m_e} + \frac{(m_i \mathcal{N}_i + m_e \mathcal{N}_e)}{m_i + m_e} \cdot \operatorname{grad} \frac{(m_i \mathcal{N}_i + m_e \mathcal{N}_e)}{m_i + m_e} \right. \\ \left. + \frac{m_i \cdot m_e}{(m_i + m_e)^2} \cdot \mathcal{D} \cdot \operatorname{grad} \mathcal{D} \right] = - \operatorname{grad} (n_i k T_i + n_e k T_e) + \\ + \frac{j \times L}{c} + \Delta P_i + \Delta P_e - \Delta n (m_i \mathcal{N}_i + m_e \mathcal{N}_e) \end{aligned}$$

In den Gleichungen (1) und (2) wird  $\mathcal{H}$  durch  $\mathcal{H}_0$  ersetzt  
 und bei Vernachlässigung der Elektronenmasse  
 folgt

$$\begin{aligned}
 n \cdot m_i \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \text{grad} \mathcal{H} + \frac{m_e}{m_i n e^2} j \cdot \text{grad} \frac{j}{n} \right] = \\
 = - \text{grad} (n [kT_e + kT_i]) + \frac{j \times \mathcal{L}}{c} + \Delta P_i + \Delta P_e - \\
 - m_i \mathcal{H} \cdot \Delta n .
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

III)

Aus Gleichung (4) endlich leitet man für die Temperaturen ab:

$$\begin{aligned}
 n_0 \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{\partial kT_0}{\partial t} + \mathcal{H}_0 \cdot \text{grad} kT_0 \right) - \Delta n \cdot \frac{3}{2} kT_0 = \\
 = - n_0 kT_0 \cdot \text{div} \mathcal{H}_0 + \text{div} (k_0 \text{grad} T_0) + \Delta E_0 ,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 n \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{\partial kT_i}{\partial t} + \mathcal{H}_i \cdot \text{grad} kT_i \right) + \Delta n \cdot \frac{3}{2} kT_i = \\
 = - n kT_i \cdot \text{div} \mathcal{H}_i + \text{div} (k_i \text{grad} T_i) + \Delta E_i ,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 n \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{\partial kT_e}{\partial t} + \mathcal{H}_e \cdot \text{grad} kT_e \right) + \Delta n \cdot \frac{3}{2} kT_e = \\
 = - n kT_e \cdot \text{div} \mathcal{H}_e + \text{div} (k_e \text{grad} T_e) + \Delta E_e .
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

In den Gleichungen (16) und (17) kommen  $\mathcal{N}_e$  und  $\mathcal{N}_i$  wieder einzeln vor; doch wegen der Zylindersymmetrie folgt aus (13):

$$\text{div } \mathcal{N}_e = \text{div } \mathcal{N}_i = \text{div } \mathcal{N}$$

und für jede skalare Funktion  $A(r,t)$ :

$$\mathcal{N}_i \cdot \text{grad } A = \mathcal{N}_e \cdot \text{grad } A = \mathcal{N} \cdot \text{grad } A = v_r \frac{\partial A}{\partial r} .$$

### III) Folgerungen aus den Maxwell'schen Gleichungen

Voraussetzungen sind nun neben den früheren:

1.  $\mathcal{L} = \{0, 0, B_z\}$  (Thetapinch-Entladung);
2. Vernachlässigung des Verschiebungsstromes.

Aus  $\text{rot } \mathcal{L} = \frac{4\pi}{c} \cdot j$  ergibt sich dann:

$$j = \left\{ 0, -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r}, 0 \right\} \quad (18)$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \mathcal{L} \quad \text{vereinfacht sich zu}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} \quad (19)$$

Durch diese Beziehung wird das bisherige Gleichungssystem (5), (8), (11), (14), (15), (16), (17) vervollständigt.

$E_\varphi$  muß jedoch noch aus dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz bestimmt werden. Dieses gewinnt man durch Multiplikation von (9) mit  $m_e$ , (10) mit  $m_i$  und nachfolgende Subtraktion:

$$\begin{aligned} & n \cdot m_i \cdot m_e \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{j}{n \cdot e} + \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \omega \cdot \text{grad} \frac{j}{n \cdot e} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \frac{j}{n \cdot e} \cdot \text{grad} \omega - \left(\frac{m_i - m_e}{m_i + m_e}\right) \cdot \frac{j}{n \cdot e} \cdot \text{grad} \frac{j}{n \cdot e} \right\} = \\ & = (m_e + m_i) \cdot n \cdot e \cdot \left( \mathcal{E} + \frac{\omega \times \mathcal{L}}{c} \right) - \left( \frac{j \times \mathcal{L}}{c} \right) (m_i - m_e) - \frac{m_i \cdot m_e}{n \cdot e} \cdot \Delta n \cdot j - \\ & - m_e \text{grad}(n_i k T_i) + m_i \text{grad}(n_e k T_e) + m_e \cdot \Delta P_i - m_i \cdot \Delta P_e . \end{aligned}$$

Durch die obigen Annahmen vereinfacht, folgt daraus für die elektrische Feldstärke:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{m_e}{e^2} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{j}{n} \right) + \omega \cdot \text{grad} \left( \frac{j}{n} \right) + \left( \frac{j}{n} \right) \cdot \text{grad} \omega - \left( \frac{j}{n} \right) \cdot \text{grad} \left( \frac{j}{n} \right) \right\} - \\ & - \left( \frac{\omega \times \mathcal{L}}{c} \right) + \frac{1}{n \cdot e} \cdot \left( - \frac{j \times \mathcal{L}}{c} \right) + \frac{m_e}{m_i \cdot n \cdot e} \text{grad}(n k T_i) - \quad (20) \\ & - \frac{1}{n \cdot e} \text{grad}(n_e k T_e) + \frac{\Delta n \cdot m_e}{n^2 \cdot e^2} j - \frac{m_e \cdot \Delta P_i}{n \cdot e \cdot m_i} + \frac{\Delta P_e}{n \cdot e} . \end{aligned}$$

Die letzten drei Terme werden zusammengefaßt zu:

$$\frac{\Delta n \cdot m_e}{n^2 \cdot e^2} j - \frac{m_e \cdot \Delta P_i}{n \cdot e \cdot m_i} + \frac{\Delta P_e}{n \cdot e} = : \eta \cdot j \quad (21)$$

Diese Gleichung dient später als Grundlage zur Berechnung des elektrischen Widerstandes  $\eta$ . Für die Gleichung (19) interessiert nur die  $\varphi$ -Komponente von  $\mathcal{E}$ . Dazu seien zuerst die Transformationsformeln für die verjüngten Tensoren auf Zylinderkoordinaten bei der geforderten Symmetrie aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} (G \cdot \text{grad } b)_r &= a_r \frac{\partial b_r}{\partial r} - \frac{1}{r} a_\varphi b_\varphi, \\ (G \cdot \text{grad } b)_\varphi &= a_r \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} a_\varphi b_r, \\ (\text{grad } A)_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0, \\ (j \times h)_\varphi &= j_z \cdot B_r - B_z j_r = 0, \\ (v \times h)_\varphi &= v_z \cdot B_r - v_r B_z = -v_r B_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Also bleibt noch:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{m_e}{e^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{j_\varphi}{n} \right) + v_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{j_\varphi}{n} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{j_\varphi}{n} \right) \cdot v_r \right\} \\ &\quad + \frac{v_r \cdot B_z}{c} + \eta \cdot j_\varphi. \end{aligned}$$

Die Größenordnung der einzelnen Summanden wird mit folgenden typischen (meist experimentellen) Werten ermittelt:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = 10^{12} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} = 3 \cdot 10^{21} \text{ ESE};$$

$$\frac{\partial j}{\partial r} = 10^5 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^3}; \quad j = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2};$$

$$B_z = 25 \text{ kT}; \quad v_r = 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}; \quad n = 10^{15} \text{ cm}^{-3};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 10^{22} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}; \quad \frac{\partial n}{\partial r} = 10^{19} \text{ cm}^{-4}; \quad \eta = 10^{-13} \text{ ESE}.$$

$$\rangle E_\varphi \approx 3 \cdot 10^{-2} + 8 + 15 \text{ (ESE)}.$$

Für das vorliegende Problem wird der erste Term vernachlässigt, so daß das Ohmsche Gesetz die Form

$$E_\varphi = v_r \cdot \frac{B_z}{c} + \eta \cdot j_\varphi \quad (23)$$

annimmt. Setzt man (18) in (23) und das resultierende  $E_\varphi$  in (19) ein, so gelangt man zur endgültigen Gleichung für das Magnetfeld:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \cdot \eta \cdot c}{4\pi} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) - \frac{B_z}{r \cdot c} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} - v_r \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (24)$$

#### IV) Stoßterme

Von den Stoßprozessen werden berücksichtigt:

1. elastische Stöße ,
2. Ladungsaustauschstöße ,
3. unelastische, ionisierende Stöße und
4. unelastische, rekombinierende.

Diese wurden ausgewählt, weil ihre Querschnitte nach Messungen und Rechnungen die größten sind.

Das Plasma wird als optisch dünn betrachtet. In diesem Abschnitt soll nur erklärt werden, welche Phänomene in die Theorie aufgenommen werden sollen. Begründungen für die spezielle Form der Ansätze gibt die Berechnung der einzelnen Koeffizienten u.a.m. im Abschnitt V.

a) Änderungsrate  $\Delta n$  der Teilchenzahldichten  $n$  (pro sec und  $\text{cm}^3$ ) durch Stöße:

$$n_e \cdot n_o \cdot S_{12} \equiv \frac{\text{Anzahl der Ionisationen}}{\text{sec} \cdot \text{cm}^3} ,$$

$$n_i \cdot n_e \cdot Q_{21} \equiv \frac{\text{Anzahl der Rekombinationen}}{\text{sec} \cdot \text{cm}^3} .$$

$S_{12}$  bzw.  $Q_{21}$  werden in  $\checkmark$  erläutert.

Damit folgt ( $n_i = n_e$ ):

$$\Delta n = n_o \cdot n \cdot S_{12} - n^2 \cdot Q_{21} \quad (25)$$

b) Änderungsrate des Neutralgasimpulses  $\Delta P_0$  durch Stöße mit Elektronen und Ionen:

$n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m_0 \cdot \mathcal{N}_0 \equiv$  Impuls, der mit den pro sec und  $\text{cm}^3$  ionisierten Teilchen verschwindet.

$n^2 \cdot Q_{21} \cdot m_0 \cdot \mathcal{N} \equiv$  Impuls, den die rekombinierenden Ionen (+ Elektronen) pro sec und  $\text{cm}^3$  zum Neutralgas mitbringen.

$\mathcal{N}_0$  (bzw.  $\mathcal{N}$ ) muß eingesetzt werden, weil sich die Pekkularimpulse wegen ihrer Richtungsverteilung herausheben.

$\gamma \cdot (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0) \equiv$  Impuls, der durch elastische und Ladungsaustauschstöße von den Ionen an das Neutralgas abgegeben wird (pro sec und  $\text{cm}^3$ ).

Gegen diesen letzten Term wird der Impulsübertrag der Elektronen (wegen der kleinen Masse) auf das Neutralgas weggelassen. Dann ist:

$$\Delta P_0 = -n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m_0 \cdot \mathcal{N}_0 + n^2 \cdot Q_{21} \cdot m_0 \cdot \mathcal{N} + \gamma (\mathcal{N} - \mathcal{N}_0). \quad (26)$$

c) Änderungsrate des Plasmaimpulses  $\Delta P_i + \Delta P_e$  durch Stöße:

Der Impulsaustausch zwischen Elektronen und Ionen hebt sich in  $\Delta P_i + \Delta P_e$  heraus.

- $n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m \cdot \mathcal{N}_0 \equiv$  wird durch Ionisation pro sec und  $\text{cm}^3$  hinzugewonnen.
- $n^2 \cdot Q_{21} \cdot m \cdot \mathcal{N} \equiv$  Impuls, der (pro sec und  $\text{cm}^3$ ) durch Rekombination verloren geht.
- $-\gamma \cdot (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0) \equiv$  Impuls, der durch elastische und Ladungsaustauschstöße an das neutrale Gas abgegeben wird.

Insgesamt:

$$\Delta P_i + \Delta P_e = n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m \cdot \mathcal{N}_0 - n^2 \cdot Q_{21} \cdot m \cdot \mathcal{N} - \gamma \cdot (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0). \quad (27)$$

d) Änderungsrate der thermischen Energie des Neutralgases  $\Delta E_0$  durch Stöße:

$$\frac{3}{2} k \cdot T_0 \cdot n_0 \cdot n \cdot S_{12} \equiv \text{Energie, die mit ionisierten Atomen verloren geht.}$$

$$\frac{3}{2} k \cdot T_i \cdot n^2 \cdot Q_{21} \equiv \text{Energie, die durch rekombinierende Ionen gewonnen wird.}$$

$$\alpha \cdot (k T_e - k T_0) \equiv \text{Energie, die bei verschiedenen Temperaturen der Elektronen und der neutralen Atome durch Stöße ausgetauscht wird.}$$

$$\beta \cdot (k T_i - k T_0) \equiv \text{Energieaustausch bei verschiedenen Temperaturen von Ionen und Neutralgas.}$$

$\tau_0 \cdot (\mathcal{W}_i - \mathcal{W}_0)^2 \equiv$  Erwärmung des Neutralgases durch Reibung zwischen Plasma und Neutralgas (aus der makroskopischen Geschwindigkeitsdifferenz in r-Richtung).

Also wird:

$$\begin{aligned} \Delta E_0 = & \frac{3}{2} k T_i \cdot n^2 \cdot Q_{21} - \frac{3}{2} k T_0 \cdot n \cdot n_0 \cdot S_{12} + \\ & + \alpha \cdot (k T_e - k T_0) + \beta \cdot (k T_i - k T_0) + \tau_0 (\mathcal{W}_i - \mathcal{W}_0)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

e) Änderungsrate der thermischen Energie der Ionen

$\Delta E_i$  durch Stöße (pro sec und  $\text{cm}^3$ )

$\frac{3}{2} \cdot k \cdot T_0 \cdot n_0 \cdot n \cdot S_{12} \equiv$  Energiegewinn durch ionisierte Atome.

$\frac{3}{2} k T_i \cdot n^2 \cdot Q_{21} \equiv$  Energieverlust durch rekombinierende Ionen.

$\frac{3}{2} n \cdot \frac{k T_e - k T_i}{t_{eq}} \equiv$  Energieaustausch durch Stöße bei verschiedenen Temperaturen von Ionen und Elektronen.

$-\beta \cdot (k T_i - k T_0) \equiv$  Energieaustausch mit Neutralgas bei verschiedenen Temperaturen.

$\tau_i (\mathcal{W}_i - \mathcal{W}_0)^2 \equiv$  Erwärmung der Ionen durch Reibung mit dem Neutralgas (makroskopisch s. unter d).

Zusammengefaßt:

$$\Delta E_i = \frac{3}{2} kT_o \cdot n_o \cdot n \cdot S_{12} - \frac{3}{2} kT_i \cdot n^2 \cdot Q_{21} + \quad (29)$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot n \cdot \frac{kT_e - kT_i}{t_{eq}} - \beta \cdot (kT_i - kT_o) + \gamma_i (n_i - n_o)^2.$$

f) Änderungsrate der thermischen Energie  $\Delta E_e$  durch Stöße (pro  $\text{cm}^3$  und sec)

$$\frac{3}{2} kT_e \cdot n^2 \cdot Q_{21} \equiv \text{Energieverlust bei Rekombination.}$$

$$\chi_H \cdot n_o \cdot n \cdot S_{12} \equiv \text{Energie, die durch die Ionisierungsprozesse ( } \chi_H = \text{ Ionisationsenergie! ) verlorenght.}$$

$$\frac{3}{2} n \cdot \frac{kT_e - kT_i}{t_{eq}} \equiv \text{Energieaustausch mit den Ionen bei verschiedenen Temperaturen.}$$

$$d \cdot (kT_e - kT_o) \equiv \text{Energieaustausch mit den neutralen Atomen bei verschiedenen Temperaturen.}$$

$$\eta \cdot j^2 \equiv \text{die durch Ohmsche Heizung in thermische umgewandelte elektrische Energie.}$$

Daraus folgt:

$$\Delta E_e = -\frac{3}{2} kT_e \cdot n^2 \cdot Q_{21} - \chi_H \cdot n_o \cdot n \cdot S_{12} - \quad (30)$$

$$- \frac{3}{2} \cdot n \cdot \frac{kT_e - kT_i}{t_{eq}} - d \cdot (kT_e - kT_o) + \eta \cdot j^2.$$

V) Zusammenstellung und Berechnung der Koeffizienten

Im folgenden wird nun speziell ein Wasserstoffplasma mit neutralen H-Atomen behandelt. Dazu sollen erst die Stoßquerschnitte beschrieben werden.

a) Elektronen - H-Atome

Den Wirkungsquerschnitt  $Q_0$  für langsame Elektronen beim Stoß mit H-Atomen haben H.S.W. Massey und B.L. Moiseiwitsch berechnet. (Für das Diagramm sind die  $Q_0$ -Werte aus A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, S. 597, Tab. 85a, entnommen). Eine neue Berechnung stammt von Temkin und Lamkin, Phys. Rev. 121, 788 (1961). Ihr Querschnitt läßt sich in dem gültigen Energieintervall gut annähern durch

$$Q_0/\text{cm}^2 = \left( \frac{47,4}{E/\text{eV} + 1,3} + 2,14 \right) \cdot 10^{-16}. \quad (31)$$

Alle drei Kurven sind in Abb. 3 eingezeichnet.

b) Ladungsaustausch  $H^+$  - H-Atome

Rechnungen für den Querschnitt  $Q_u$  der Reaktion



liegen für langsame ( $E < 1 \text{ keV}$ ) Protonen von A. Dalgarno und H.N. Yadav vor (Proc. Phys. Soc., London, A 66, 173 (1953)).

Umladungsquerschnitte:  $H+H \rightarrow H+H$

Stoßquerschnitte:  $e^- \rightarrow H$

○—○ Massey und Moiseiwitsch

x.....x Temkin und Lamkin

..... angenähert durch

$$Q_0 = \left( \frac{47,4}{E+1,3} + 2,14 \right) \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

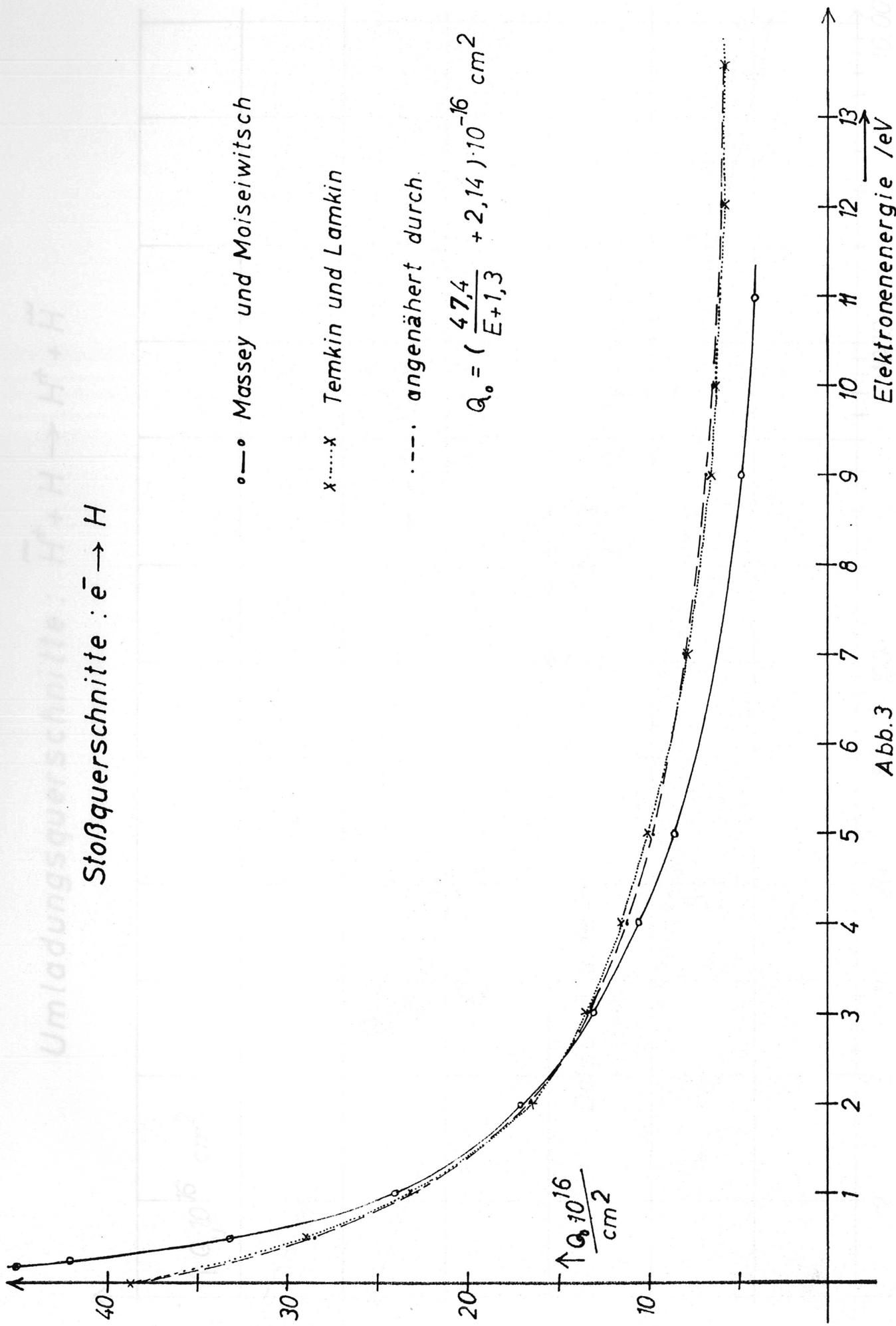


Abb.3

Elektronenenergie / eV

$\uparrow Q \cdot 10^{16} / \text{cm}^2$

Umladungsquerschnitte:  $\tilde{H}^+ + H \rightarrow H^+ + \tilde{H}$

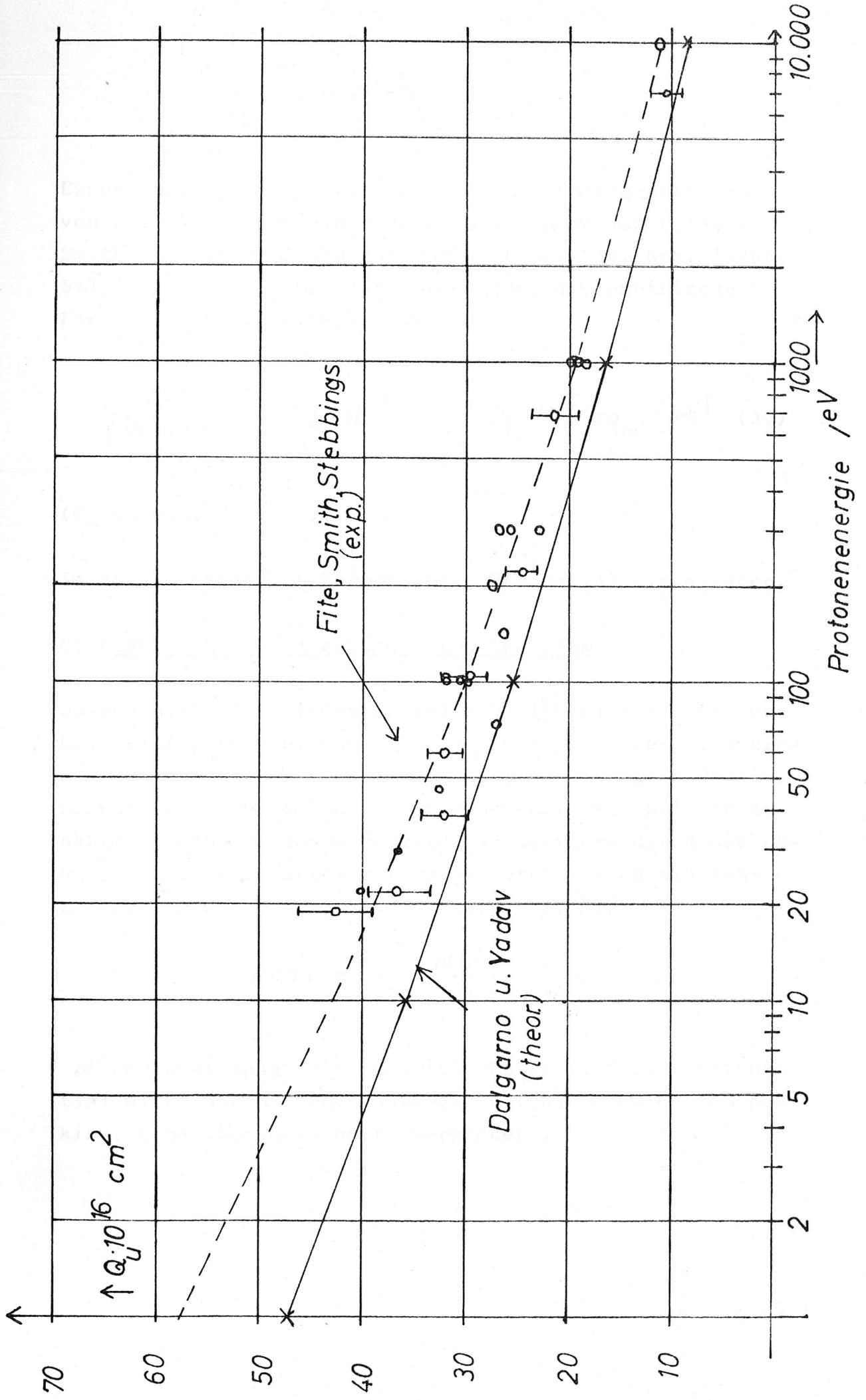


Abb. 4

Experimentelle Werte bis herunter zu Protonenenergien von ca. 20 eV sind einer Veröffentlichung von Fite, Smith und Stebbings zu entnehmen (Proc. Roy. Soc. A 268, 527 (Aug. 1962)). Diese Autoren geben als empirische Formel zu ihren Messungen an:

$$\sqrt{Q_u / \text{cm}^2} = 7,6 \cdot 10^{-8} - 1,06 \cdot 10^{-8} \log_{10}(E/\text{eV}) \quad (32)$$

( $Q_u$  in  $\text{cm}^2$ ,  $E$  in eV).

In Abb. 4 sind alle Kurven (oder Meßpunkte) eingetragen.

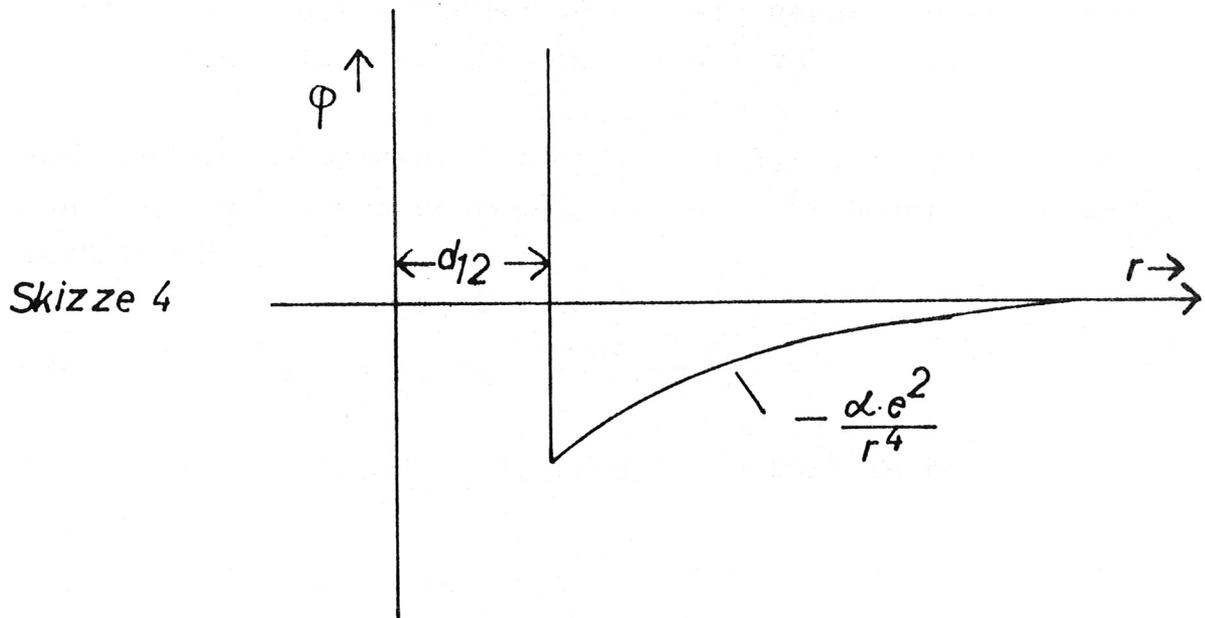
### c) Elastischer Stoß zwischen Ion und Atom

Querschnitte für diesen Prozeß habe ich nirgends in der Literatur gefunden, weder berechnet noch gemessen, wenigstens nicht in dem hier interessierenden Energiebereich. Deshalb wird der folgende Weg eingeschlagen: bei der Annäherung von Ion und Atom wird das letztere durch die Ladung des Ions polarisiert. Daraus ergibt sich ein (anziehendes) Wechselwirkungspotential (s. [7])

$$\varphi(r) = - \frac{\alpha \cdot e^2}{r^4} ;$$

$\alpha$  bedeutet dabei die Polarisierbarkeit. Dieses Potential wirkt durch seine Anziehung so, als ob sich der gas-kinetische Stoßquerschnitt vergrößere.

Zur Berechnung der Querschnitte dient nun mit obigem  $\varphi(r)$  das aus der kinetischen Gastheorie bekannte Sutherlandsche Modell für Teilchen mit schwacher gegenseitiger Anziehung beim Stoß. Diesem Modell liegt eine Idealisierung des gesamten Wechselwirkungspotentials zugrunde, wie sie aus Skizze 4 hervorgeht.



Eine ausführliche Darstellung findet man in [8] und [9]

Der totale Stoßquerschnitt  $\sigma_i = \int \sigma(\chi) d\Omega$  lautet nach dieser Theorie:

$$\sigma_i = \pi \cdot d_{12}^2 + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot e^2}{d_{12}^2} \cdot \frac{1}{\frac{m^*}{2} \cdot v_{rel}^2}$$

$d_{12}$  ist die Summe der gaskinetischen Radien der Stoßpartner  $d_{12} = r_1 + r_2$ .

$m^*$  bedeutet die reduzierte Masse  $m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

und  $V_{rel}$  die Relativgeschwindigkeit der Teilchen.

$d_{12}$  wird hier gleich dem gaskinetischen Radius des H-Atoms gesetzt; denn der Protonenradius kann gegen diesen unterdrückt werden (Nukleonenradius:  $1,4 \cdot 10^{-13}$  cm).

Aus Landolt-Börnstein, 1. Band, Teil I, S. 325, entnimmt man für den "Wirkungsdurchmesser bei sehr hoher Temperatur" für H:

$$2,39 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

oder  $d_{12} = 1,195 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$

In demselben Band, S. 399, findet man für die Polarisierbarkeit

$$\alpha = 6,64 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^3 .$$

Es ist fraglich, ob diese Werte auch unter den vorliegenden extremen Bedingungen (Temperatur für  $d_{12}$ ,  $\mathcal{E}$ - $\mathcal{B}$ -Feld für  $\alpha$ ) gelten, aber in Ermangelung besserer werden sie eingesetzt. Mit  $m_H \approx m_H^+ = 1,672 \cdot 10^{-24}$  g und  $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$  ESE  $H^+$  wird

$$\sigma_i / \text{cm}^2 = 4,486 \cdot 10^{-16} + \frac{8,1 \cdot 10^{-3}}{V_{rel}^2 / \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right)} . \quad (33)$$

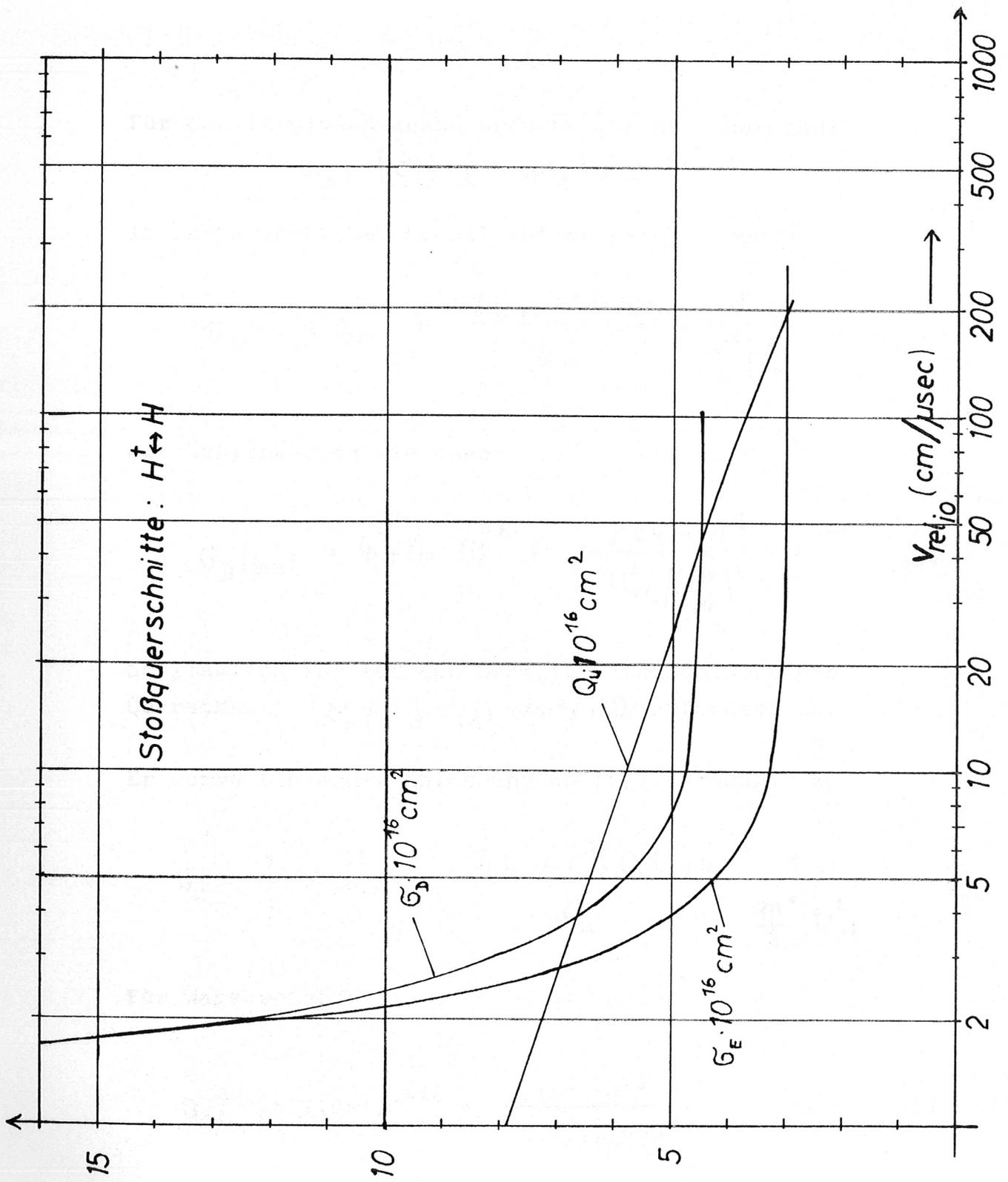


Abb. 5

Für den Impulsaustausch braucht man den Querschnitt

$$\sigma_D = \int \sigma(\chi) (1 - \cos\chi) d\Omega.$$

Im Sutherlandschen Modell ist er gegeben durch

$$\sigma_D = \pi \cdot d_{12}^2 + \frac{2\pi \cdot \alpha \cdot e^2 \cdot 0,2011}{d_{12}^2} \cdot \frac{1}{\frac{m^*}{2} \cdot v_{rel}^2},$$

mit Zahlenwerten wie oben:

$$\sigma_D / \text{cm}^2 = 4,486 \cdot 10^{-16} + \frac{3,242 \cdot 10^{-3}}{v_{rel}^2 / \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2}, \quad (34)$$

Schließlich ist für den Energieaustausch noch der Querschnitt  $\sigma_E = \int \sigma(\chi) \sin^2\chi d\Omega$  erforderlich.

Er wurde (in enger Anlehnung an [9]) berechnet zu

$$\sigma_E = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot d_{12}^2 + \frac{2\pi \alpha e^2 \cdot 0,1956}{d_{12}^2} \cdot \frac{1}{\frac{m^*}{2} \cdot v_{rel}^2}.$$

Für Wasserstoff:

$$\sigma_E / \text{cm}^2 = 2,99 \cdot 10^{-16} + \frac{3,153 \cdot 10^{-3}}{v_{rel}^2 / \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2}, \quad (35)$$

In Abb. 5 sind diese elastischen Stoßquerschnitte mit dem Umladungsquerschnitt verglichen.

Jonisationskoeffizient  $S_{12}$  ( $\text{cm}^3 \text{ sec}^{-1}$ )

$T_e$ (eV)	0,345	0,69	1,38	2,76	5,52
$n(\text{cm}^{-3})$					
$10^8$	$1,6 \cdot 10^{-26}$	$1,1 \cdot 10^{-17}$	$3,6 \cdot 10^{-13}$	$8,4 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$
$10^9$	$1,8 \cdot 10^{-26}$	$1,2 \cdot 10^{-17}$	$3,8 \cdot 10^{-13}$	$8,8 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$
$10^{10}$	$2,7 \cdot 10^{-26}$	$1,4 \cdot 10^{-17}$	$4,2 \cdot 10^{-13}$	$9,2 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$
$10^{11}$	$4,5 \cdot 10^{-26}$	$1,9 \cdot 10^{-17}$	$4,9 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$
$10^{12}$	$1,0 \cdot 10^{-25}$	$3,0 \cdot 10^{-17}$	$6,5 \cdot 10^{-13}$	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$
$10^{13}$	$3,6 \cdot 10^{-25}$	$6,8 \cdot 10^{-17}$	$1,1 \cdot 10^{-12}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$
$10^{14}$	$2,2 \cdot 10^{-24}$	$2,3 \cdot 10^{-16}$	$2,5 \cdot 10^{-12}$	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$3,6 \cdot 10^{-9}$
$10^{15}$	$1,8 \cdot 10^{-23}$	$1,3 \cdot 10^{-15}$	$8,6 \cdot 10^{-12}$	$6,9 \cdot 10^{-10}$	$6,6 \cdot 10^{-9}$
$10^{16}$	$1,5 \cdot 10^{-22}$	$5,9 \cdot 10^{-15}$	$1,9 \cdot 10^{-11}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$	$8,5 \cdot 10^{-9}$
$10^{17}$	$5,8 \cdot 10^{-22}$	$1,0 \cdot 10^{-14}$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$8,8 \cdot 10^{-9}$
$10^{18}$	$8,2 \cdot 10^{-22}$	$1,1 \cdot 10^{-14}$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$8,8 \cdot 10^{-9}$

Tab. 5

Rekombinationskoeffizient  $Q_{21}$  ( $\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}$ )

$T_e$ (eV)	0,345	0,69	1,38	2,76	5,52
$10^8$	$9,2 \cdot 10^{-13}$	$5,1 \cdot 10^{-13}$	$3,0 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
$10^9$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$5,3 \cdot 10^{-13}$	$3,0 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
$10^{10}$	$1,4 \cdot 10^{-12}$	$6,1 \cdot 10^{-13}$	$3,2 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
$10^{11}$	$2,2 \cdot 10^{-12}$	$8,1 \cdot 10^{-13}$	$3,4 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
$10^{12}$	$4,4 \cdot 10^{-12}$	$1,2 \cdot 10^{-12}$	$4,3 \cdot 10^{-13}$	$2,0 \cdot 10^{-13}$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
$10^{13}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$	$2,1 \cdot 10^{-12}$	$6,2 \cdot 10^{-13}$	$2,4 \cdot 10^{-13}$	$1,1 \cdot 10^{-13}$
$10^{14}$	$5,1 \cdot 10^{-11}$	$5,1 \cdot 10^{-12}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$3,1 \cdot 10^{-13}$	$1,2 \cdot 10^{-13}$
$10^{15}$	$2,7 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-11}$	$2,3 \cdot 10^{-12}$	$4,9 \cdot 10^{-13}$	$1,6 \cdot 10^{-13}$
$10^{16}$	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$8,4 \cdot 10^{-11}$	$5,0 \cdot 10^{-12}$	$7,3 \cdot 10^{-13}$	$1,9 \cdot 10^{-13}$
$10^{17}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-10}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$	$1,8 \cdot 10^{-12}$	$4,4 \cdot 10^{-13}$
$10^{18}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$9,6 \cdot 10^{-11}$	$1,2 \cdot 10^{-12}$	$2,8 \cdot 10^{-13}$

Tab.6

### Ionisation und Rekombination

Für ein optisch dünnes Plasma haben Bates, Kingston und McWhirter (Proc. of the Roy. Soc., A 267, S. 297, (1962)) Ionisierungs- und Rekombinationswahrscheinlichkeiten veröffentlicht. Sie nehmen in die Rechnung Photo-rekombination, Dreierstoßkombination, Stoßanregung und Stoßionisation auf. Ihre Ergebnisse gelten für einen Elektronentemperaturbereich von 250 - 64 000° K und Elektronendichten von  $10^8 - 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Die Tabelle 5 für den Ionisationskoeffizienten  $S_{12}$  und Tabelle 6 für den Rekombinationskoeffizienten  $Q_{21}$  sind der oben zitierten Arbeit entnommen.

Für höhere Temperaturen werden (ungenauere) Koeffizienten eingesetzt, wie sie Elwert (Z.f. Naturforschg. 7a, 432 (1952)) berechnet hat. Für den Koeffizienten der Elektronenstoßionisation gibt er an:

$$S_{12} = \frac{3 \cdot C_2}{4 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Phi_0 \cdot C}{\alpha^3} \cdot f_2 \cdot \left\{ \frac{k T_e}{\chi_n} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\chi_n}{\chi_H} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi_H}{k T_e}} \cdot G_2 \cdot h_2.$$

Dabei ist

$$C_2 = 2$$

(empirische Konstante aus der Bestimmung des Stoßquerschnittes);

$$0,5 < f_2 < 1,3$$

Faktor zum Erfassen der Schwankung beim Vergleich des Stoßquerschnittes mit experimentellen Werten;

$$\Phi_0 = 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Wirkungsquerschnitt für Thomsonstreuung;

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ionisierungs} \\ \text{koeffizient} \end{array} \right.$

$\chi_n$   
 $h_2$

$G_2$

die Anzahl der Elektronen in der n-ten Schale und die zugehörige Ionisierungsenergie. soll berücksichtigen, daß sich die Elektronen z.T. in angeregten Zuständen befinden;  
ist ein Korrekturfaktor zwischen 0,6 und 1.

Im vorliegenden Problem ist  $\left\{ n \right. = 1, \chi_H = 13,54 \text{ eV}, f_2 = 1; h_2$  wird von Elwert gleich 1 gewählt.  
Mit  $x := \chi_H / kT_e$  ist (nach [10])

$$G_2 = \frac{x + 0,3}{x + 1} \quad \text{für } x > 1.$$

Setzt man Zahlenwerte ein, dann ergibt sich

$$S_{12} / \text{cm}^3 \text{ sec}^{-1} = 4,396 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-x} \cdot x^{-1/2} \cdot G_2 \cdot h_2 .$$

In der Abb. 6 sind neben den Elwertschen Koeffizienten auch die Ergebnisse von V.I. Kogan (s. [11]) und von Bates und Mitarbeitern (für  $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ) zu sehen.

Im Vergleich mit den übrigen liegen die Elwertschen Kurven zu tief. Da wegen der Verschiedenheit von  $S_{12}$  und  $Q_{21}$  um mehrere Größenordnungen bei 6 eV schon eine beträchtliche Elektronendichte vorhanden sein wird, darf wohl  $G_2 \cdot h_2 (= 3)$  so gewählt werden, daß  $S_{12}$  an die Bates'schen Werte für  $n = 10^{15} - 10^{17}$  anschließt. Gerechtfertigt ist dieses Verfahren

1. durch die unterschiedlichen Angaben bei den verschiedenen Autoren;

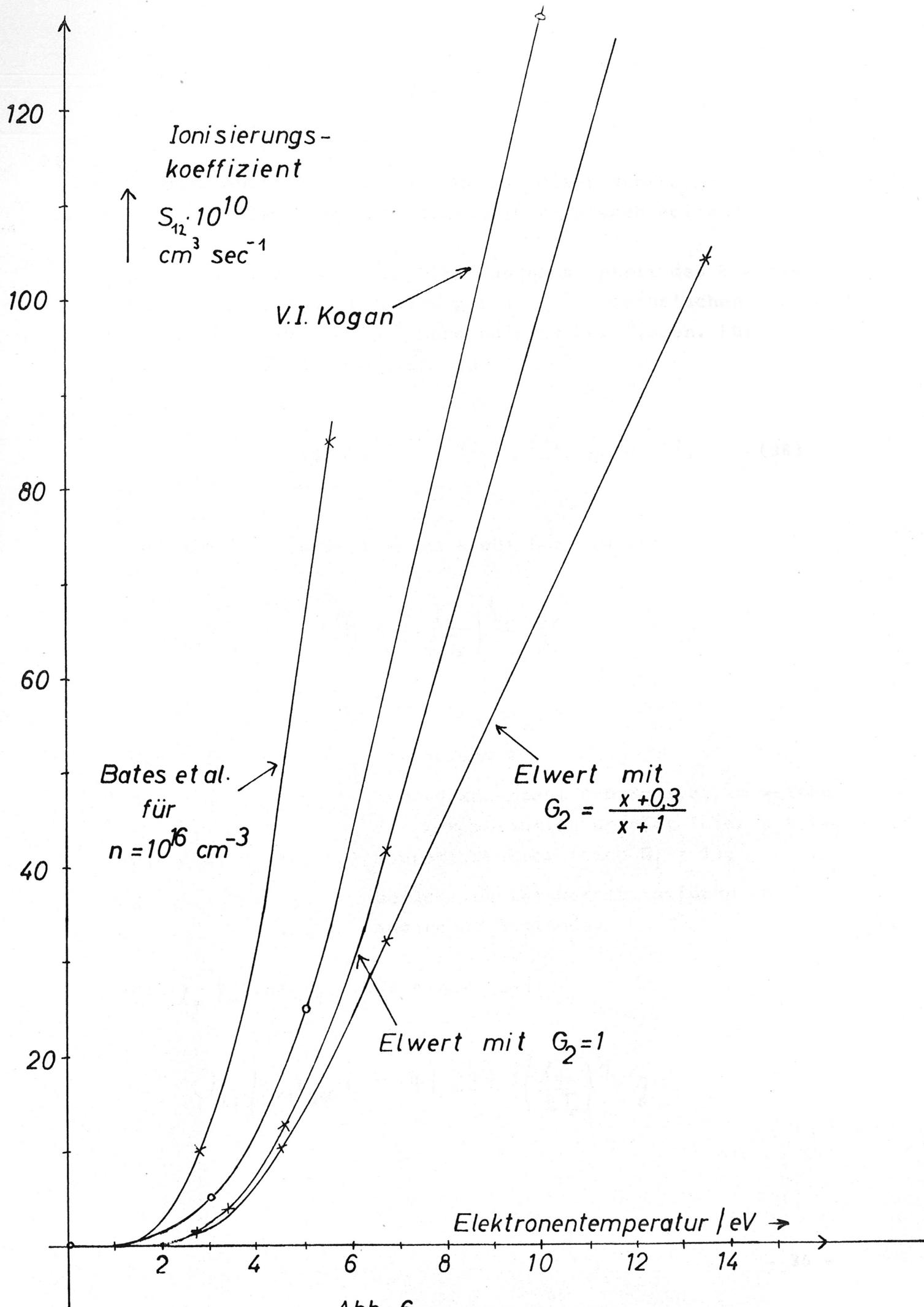


Abb. 6

2. dadurch, daß beim Übergang auf die Elwertformel möglichst wenig Unstetigkeiten entstehen sollen.

Der Fehler, infolge der Dichteunabhängigkeit des Elwert-schen  $S_{12}$ , ist nicht allzu groß, da die Bates'schen Kurven für  $n = 10^{15} - 10^{18}$  nahe beieinander liegen. Für  $T_e > 64\ 000^\circ\text{K}$  wird also dann

$$S_{12} = 13,2 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-x} \cdot x^{-1/2} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}. \quad (36)$$

Für die Photorekombination steht bei Elwert:

$$Q_{21} = \frac{8 \cdot f_1}{\sqrt{3\pi}} \cdot \Phi_0 \cdot c \cdot \left( \frac{\chi_H}{kT_e} \right)^{1/2} \cdot \frac{\chi_n}{\chi_H} \cdot n \cdot G_1 \cdot g$$

$$0,6 < f_1 < 1$$

entspricht  $f_2$ ;

$n$

Hauptquantenzahl der Schale, in welche die Rekombination erfolgt (hier  $n = 1$ );

$$0,6 < G_1 < 1$$

Korrekturfaktor (hier  $G_1 = 1$ );

$g$

berücksichtigt Rekombinationen in angeregte Zustände.

Mit  $\chi_n = \chi_H$  und  $f_1 = 0,8$  erhält man:

$$Q_{21} / \text{cm}^3 \text{ sec}^{-1} = 41,238 \cdot \left( \frac{\chi_H}{kT_e} \right)^{1/2} \cdot g$$

Aus den gleichen Gründen wie bei  $S_{12}$  wird  $g = 2$  gesetzt. Nach McWhirter [12] müßte noch ein temperaturabhängiger Faktor hinzugenommen werden, der sich für höhere Temperaturen 1 nähert. Darauf soll aber keine Rücksicht genommen werden, weil der Fehler durch die Vernachlässigung der Dichteabhängigkeit und die Unsicherheit in der Theorie selbst in ähnlicher Größenordnung wie diese Korrektur liegen dürften. Also ist

$$Q_{21} / \text{cm}^3 \text{sec}^{-1} = 82,48 \cdot \chi^{1/2}. \quad (37)$$

Wegen des Ansatzes (25) für die Ionisation und Rekombination muß am Anfang der Rechnung die Elektronendichte  $n \neq 0$  sein.

Außerdem darf man nicht bei zu niedrigen Temperaturen beginnen, weil dann der Rekombinationskoeffizient viel größer ist als der für Ionisation.

In einer  $\theta$ -pinch-Entladung werden wenige Elektronen während des Nulldurchganges des schwingenden  $\vec{B}$ -feldes durch das dabei maximale  $\vec{E}$ -feld (einige kV/cm) stark beschleunigt [1]. Sie erzeugen durch Stoß mit den Neutralteilchen Sekundärelektronen einer Temperatur von 1 - 2 eV. In diesem Stadium kann nun die vorliegende Rechnung beginnen.

Eventuell könnte man auch (nach einem Vorschlag von Prof. A. Schlüter) eine künstliche Zusatztemperatur aus dem Strom für die Ionisierung (und Rekombination) einführen:

$$\frac{3}{2} k T_e + \frac{m}{2} (\mathcal{W}_e - \mathcal{W}_0)^2 = \frac{3}{2} k T_e' \quad \rangle$$

$$\rangle T_e' = T_e + \frac{m_e}{3k} (\mathcal{W}_e - \mathcal{W}_0)^2 \quad \rangle$$

$$\rangle T_e'/\text{grad} \approx 2,2 \cdot 10^{-12} \left[ (v_r - v_{or})^2 / \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} + \frac{j^2}{n^2 \cdot e^2} / \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \right] + T_e/\text{grad}.$$

Eine Abschätzung mit  $j = 50 \frac{\text{k Amp}}{\text{cm}^2}$ ,

$$v_r - v_{or} = 10^7 \quad \text{und} \quad n = 10^{16}$$

liefert für die kleine Zusatztemperatur  $2,2 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ .

In den Anfangsstadien ist  $j$  und  $v$ , aber auch  $n$  kleiner.

Die folgenden Berechnungen der übrigen Koeffizienten gründen sich auf einfache Ansätze aus der kinetischen Gastheorie. In erster Näherung werden die schwierigen Integrationen über die Verteilungsfunktion durch Einführung von Teilchen mit "mittleren Eigenschaften" umgangen. Dieses Vorgehen läßt sich stützen durch:

1. die große Unsicherheit in den Stoßquerschnitten (s. Bemerkung in [10], S. 585).
2. Man kann in den Bereichen, in denen die Querschnitte numerisch bekannt sind, diese durch integrierbare Funktionen annähern; doch ist es oft unsinnig, damit nach 0 und  $\infty$  zu extrapolieren, was für die Integration mit den Verteilungsfunktionen notwendig ist.

3. Die Verteilungsfunktion selbst ist in dem vorliegenden Problem nicht genau bekannt, da nicht immer Gleichgewicht herrscht.
4. Vom gesamten Gleichungssystem aus gesehen ist es wohl zweckmäßig, zunächst einmal durch Variierung der Konstanten, Parameter u.a.m. festzustellen, welche Glieder die Lösungen empfindlich beeinflussen; dann kann man versuchen, diese Glieder genauer zu berechnen.

Das Reibungsglied  $\gamma \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_0)$

Das  $\mathcal{E}$ - $\mathcal{B}$ -Feld beschleunigt nur das Plasma, so daß dessen Geschwindigkeit  $\bar{v}$  von der des Neutralgases  $\bar{v}_0$  verschieden sein kann. Das Plasma "bewegt sich durch das Neutralgas" und nimmt dieses durch Reibung (Stöße) mit.

a) Impulsaustausch durch elastische Stöße

Die Geschwindigkeit von  $dn$  Ionen liege zwischen  $\bar{v}_i$  und  $\bar{v}_i + d\bar{v}_i$ , die von  $dn_0$  Atomen zwischen  $\bar{v}_0$  und  $\bar{v}_0 + d\bar{v}_0$ ; der differentielle Stoßquerschnitt sei  $d\sigma$ .

Dann ist die differentielle Stoßfrequenz:

$$d\sigma \cdot |\bar{v}_i - \bar{v}_0| \cdot dn_i \cdot dn_0$$

Der dabei übertragene Impuls lautet:

$$dP_i = m^* \cdot (\bar{v}'_{rel} - \bar{v}_{rel}) \cdot |\bar{v}_{rel}| \cdot d\sigma \cdot dn_i \cdot dn_0 \cdot$$

$m^*$  ist wieder die reduzierte Masse,  $\bar{v}_{rel} = \bar{v}_i - \bar{v}_0$ ,  
 $\bar{v}'_{rel}$  die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß  
 ( $\bar{v}_{rel} = |\bar{v}_{rel}|$ ). Bei Kugelsymmetrie des Stoßproblems, was hier vorausgesetzt ist, spielt von  $\bar{v}'_{rel} - \bar{v}_{rel}$  nur die Komponente parallel zu  $\bar{v}_{rel}$  eine Rolle, die senkrecht dazu mittelt sich heraus.

Ist  $\chi$  der Winkel, um den die Relativgeschwindigkeit beim Stoß gedreht wird und  $b$  der Stoßparameter ( $d\sigma = 2\pi b(\chi) db$ ), so folgt:

$$dP_1 = m^* (1 - \cos\chi) \cdot \bar{N}_{rel} \cdot \bar{U}_{rel} \cdot dn_i \cdot dn_o \cdot 2\pi b db.$$

Integration über  $\chi$  ergibt (s. vor (34))

$$dP_1 = m^* \cdot \bar{N}_{rel} \cdot \bar{U}_{rel} \cdot \sigma_D(\bar{U}_{rel}) \cdot dn_i \cdot dn_o.$$

Statt der restlichen Integrationen über  $dn_i$  und  $dn_o$  (mit den entsprechenden Verteilungsfunktionen) wird zu Teilchen von mittlerer Relativgeschwindigkeit übergegangen. Die mittlere Relativgeschwindigkeit aus der Temperaturbewegung ist

$$\bar{U}_{temp} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right)}.$$

Dazu kommt die Differenz der makroskopischen Geschwindigkeiten

$$W_i - W_o$$

Im vektoriellen (mittleren!)  $\bar{N}_{rel}$  mittelt sich der Beitrag der  $\bar{U}_{temp}$  heraus, also

$$\bar{N}_{rel} = N_i - N_o = N - N_o + \left[ \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{1}{n \cdot e} \cdot j \right].$$

Für den Betrag aber erhält man

$$\begin{aligned} U_{rel} &= \sqrt{\bar{U}_{temp}^2 + W_{rel}^2 + 2 \bar{U}_{temp} W_{rel}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |W_i - W_o|^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Der Impuls nimmt dann die Form an:

$$P_1 = m^* \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |\omega_i - \omega_o|^2} \cdot n \cdot n_o \cdot \sigma_D(v_{rel}) \cdot (\omega_i - \omega_o). \quad (39)$$

b) Impulsaustausch durch Umladung

Bei dieser Art von Stößen wird der Impuls der beiden Stoßpartner einfach vertauscht. Von der geringen Änderung des Winkels  $\chi$  beim Stoß kann man in erster Näherung absehen. Der übertragene Impuls ist dann gleich der Differenz der beiden ursprünglichen Impulse. Die Bezeichnungen seien wie in a); dann ist die Stoßfrequenz gegeben durch

$$Q_u(\bar{v}_{rel}) \cdot \bar{v}_{rel} \cdot dn_i \cdot dn_o$$

und der übertragene Impuls

$$dP_2 = (m_i \bar{\omega}_i - m_o \bar{\omega}_o) \cdot Q_u(\bar{v}_{rel}) \cdot \bar{v}_{rel} \cdot dn_i \cdot dn_o.$$

Durch dasselbe Vorgehen wie oben bekommt man schließlich

$$P_2 = (m_i \bar{\omega}_i - m_o \bar{\omega}_o) \cdot n \cdot n_o \cdot Q_u(v_{rel}) \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |\omega_i - \omega_o|^2}. \quad (40)$$

Mit  $m_i = m_{H^+} \approx m_H = m_o = m$  ergibt die Summe von (39)

und (40)

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\omega_i - \omega_o) &= \\ &= n_o \cdot n \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) \cdot m \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m} \right) + |\omega_i - \omega_o|^2} \times \\ &\quad \times (\omega_i - \omega_o). \end{aligned} \quad (41)$$

Koeffizienten für den Energieausgleich

Das Problem des Energieaustausches zwischen neutralen Atomen und Ionen behandelt A.M. Cravath [13]. Alle Teilchen sind bei ihm glatte, elastische Kugeln ohne (anziehendes) Wechselwirkungspotential mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung für jede Partikelart. Er erhält für die Energie, die pro sec und  $\text{cm}^3$  abgegeben bzw. aufgenommen wird:

$$\Delta E = 8 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot n \cdot n_0 \cdot d_{12} \cdot R^{3/2} \cdot (m_i + m_0)^{-2} \times \quad (42)$$

$$\times \left\{ m_0 \cdot m_i (m_i T_0 + m_0 T_i) \right\}^{1/2} \cdot (T_i - T_0) .$$

Es gelten dieselben Bezeichnungen wie in den vorausgehenden Abschnitten.

Hier soll jedoch der Stoßquerschnitt nicht - wie in (42) - konstant sein. Mathematisch läuft das Verfahren zur Verbesserung von (42) darauf hinaus, den Querschnitt  $\sigma(\bar{v}_{rel})$  aus einem Integral

$$\Delta E = \int_0^{\infty} \sigma(\bar{v}_{rel}) \cdot G(\bar{v}_{rel}, \dots) d\bar{v}_{rel}$$

( $\sigma \cdot G$  ist eine Funktion, die wegen der Konvergenz des Integrals für  $\bar{v}_{rel} \rightarrow \infty$  nach Null gehen muß), herauszuziehen, mit einem mittleren  $v_{rel}$  als Argument. Bricht man die Integration dort, wo der Integrand praktisch verschwunden ist, ab, dann darf man nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung  $\bar{\sigma}$  mit einem mittleren Argument vor

das Integral ziehen. Es ist natürlich nicht gesagt, daß dieser "mathematische Mittelwert" für  $\bar{v}_{rel}$  gleich der mittleren Relativgeschwindigkeit (38) ist. Aber das ist gerade die Ungenauigkeit, die mit der Einführung von "mittleren Eigenschaften" aus den oben erwähnten Gründen zugelassen wird.

Schreibt man den Cravathschen Ausdruck um in

$$\Delta E = \underbrace{\pi \cdot d_{12}^2 \cdot n_o \cdot n \cdot \sqrt{\frac{8k}{\pi} \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_o}{m_o} \right)}}_f \cdot \frac{4 m_i \cdot m_o}{(m_i + m_o)^2} \cdot (kT_i - kT_o)$$

so erkennt man in  $f$  sofort die mittlere Stoßfrequenz. In diese werden nun unsere mittleren Eigenschaften eingesetzt:

$$\Delta E = \sigma(v_{rel}) \cdot n_o \cdot n \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_o|^2} \times \quad (43)$$

$$\times \frac{4 \cdot m_i \cdot m_o}{(m_i + m_o)^2} \cdot (kT_i - kT_o).$$

a) Austauschrate  $\beta \cdot (kT_i - kT_o)$

Für elastische Stöße zwischen Protonen und Wasserstoff folgt aus (43)

$$\Delta E_{elast.} = \sigma_E(v_{rel}) \cdot n \cdot n_o \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m} + \frac{kT_o}{m} \right) + |\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_o|^2} \times \quad (44)$$

$$\times (kT_i - kT_o).$$

Bei den Ladungsaustauschstößen wird die Energie der Stoßpartner ausgetauscht. Für "mittlere Teilchen" ist dann pro Stoß

$$\Delta E'_u = \frac{3}{2} (kT_i - kT_o)$$

und die Stoßfrequenz

$$f_u = Q_u(v_{rel}) \cdot n \cdot n_o \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |v_i - v_o|^2}$$

Daraus folgt für die Energieaustauschrate

$$\Delta E_u = \frac{3}{2} \cdot Q_u(v_{rel}) \cdot n \cdot n_o \cdot \sqrt{\sim} \cdot (kT_i - kT_o). \quad (45)$$

Die Summe aus (44) und (45) ergibt endlich

$$\begin{aligned} \beta \cdot (kT_i - kT_o) &= \\ &= n \cdot n_o \cdot (\sigma_E + Q_u) \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |v_i - v_o|^2} \times \\ &\quad \times (kT_i - kT_o). \end{aligned} \quad (46)$$

b) Austauschrate  $\alpha(kT_e - kT_0)$

Auf Elektronen-Atomstöße angewandt, liefert (43) mit dem Querschnitt  $Q_0$  aus (31)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (kT_e - kT_0) &= \\ &= Q_0 \cdot n \cdot n_0 \cdot 2,175 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT_e}{m_e} + |\omega_e - \omega_0|^2} \times \\ &\quad \times (kT_e - kT_0). \end{aligned} \quad (47)$$

Dabei ist  $|\omega_e - \omega_0| = \left| \omega - j \cdot \frac{1}{n \cdot e} - \omega_0 \right|$ .

c) Austauschrate  $\frac{3}{2}(kT_e - kT_i) \cdot 1/t_{eq}$

Die Relaxationszeit  $t_{eq}$  für den Temperaturausgleich zwischen Elektronen und Ionen ist nach L. Spitzer [14]

$$t_{eq} = \frac{3 \cdot m_e \cdot m \cdot \left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}}}{8 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot n \cdot e^4 \cdot \ln \Lambda} ;$$

mit Zahlenwerten (für Protonen):

$$t_{eq}/\text{sec} = 1,56 \cdot 10^{26} \cdot \frac{(kT_e/\text{erg})^{\frac{3}{2}}}{n/\text{cm}^3 \cdot \ln \Lambda} \quad (48)$$

Dabei ist

$$\Lambda = \frac{3 \cdot (kT_e)^{3/2}}{2 \cdot e^3 \cdot \sqrt{\pi \cdot n}} ;$$

mit Zahlenwerten:

$$\Lambda = 7,638 \cdot 10^{27} \cdot \frac{(kT_e/\text{erg})^{3/2}}{\sqrt{n/\text{cm}^{-3}}} . \quad (49)$$

### Der elektrische Widerstand $\eta$

Durch Gleichung (23) war  $\eta \cdot j$  definiert worden als

$$\eta \cdot j := \frac{\Delta n \cdot m_e}{n^2 \cdot e^2} j - \frac{m_e \cdot \Delta P_i}{e \cdot m_i \cdot n} + \frac{\Delta P_e}{n \cdot e} .$$

$\Delta P_i$  war die Impulsänderung der Ionen durch Stöße,  
 $\Delta P_e$  entsprechend für Elektronen. Bedeutet  $P_{i0}$  den  
 Impulsaustausch zwischen Ionen und Neutralteilchen (ent-  
 sprechend  $P_{e0}$ ,  $P_{ie}$ ,  $P_{ei}$ ), dann kann man aufteilen:

$$\Delta P_i = P_{i0} + P_{ie} + n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m_i \cdot \mathcal{N}_0 - n^2 \cdot Q_{21} \cdot m_i \cdot \mathcal{N}_i$$

und

$$\Delta P_e = P_{e0} + P_{ei} + n_0 \cdot n \cdot S_{12} \cdot m_e \cdot \mathcal{N}_0 - n^2 \cdot Q_{21} \cdot m_e \cdot \mathcal{N}_e .$$

Da  $P_{ei} = -P_{ie}$  ist, folgt (mit Gleichung (25)):

$$\eta \cdot j = n_0 \cdot n \cdot \int_{12} \frac{m_e}{n^2 \cdot e^2} j + \frac{1}{n \cdot e} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \cdot P_{ei} - \frac{m_e}{n \cdot e \cdot m_i} \cdot P_{io} + \frac{1}{n \cdot e} \cdot P_{eo} . \quad (50)$$

Vernachlässigt man im zweiten Term  $\frac{m_e}{m_i}$  gegen 1, so erkennt man sofort die Spitzersche Definition des Widerstandes eines vollionisierten Plasmas [15].

Für  $P_{io}$  und  $P_{eo}$  werden Ansätze gemacht, wie in (41) bzw. (39):

$$P_{io} = -n_0 \cdot n \cdot m |U_{rel\ io}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) \cdot (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0)$$

und

$$P_{eo} = -n_0 \cdot n \cdot \frac{m_e \cdot m_0}{m_e + m_0} |U_{rel\ eo}| \cdot Q_0 \cdot (\mathcal{N}_e - \mathcal{N}_0) .$$

Die beiden letzten Glieder in (50) lauten dann:

$$\begin{aligned} & - \frac{m_e}{n \cdot e \cdot m_i} \cdot P_{io} + \frac{1}{n \cdot e} \cdot P_{eo} = \\ & = n_0 \cdot n \cdot m_e \cdot |U_{rel\ eo}| \cdot Q_0 \cdot \frac{1}{n^2 \cdot e^2} \cdot j + \\ & + \frac{n_0 \cdot m_e}{e} (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0) \cdot \left[ |U_{rel\ io}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) - |U_{rel\ eo}| \cdot Q_0 \right] . \end{aligned}$$

Der zweite Summand wird gegen den ersten klein sein

1. wegen der Differenz in der eckigen Klammer,
2. wegen  $|\omega_i - \omega_e| \gg |\omega_i - \omega_0|$ .

Er wird deshalb weggelassen.

Setzt man dann für  $|U_{rel e0}|$  ein,

$$|U_{rel e0}| = \sqrt{\frac{3 k T_e}{m_e}},$$

so erhält man mit  $\frac{n_0}{n} \cdot Q_0 \cdot \frac{\sqrt{3 m_e k T_e}}{e^2}$

die von A. Unsöld [16] verwendete Korrektur des elektrischen Widerstandes für teilweise ionisiertes Plasma.

In unserem Fall folgt aus (50):

$$\begin{aligned} \eta \cdot j &= \\ &= \frac{n_0}{n} \cdot S_{12} \cdot \frac{m_e}{e^2} \cdot j + \frac{n_0}{n} \cdot Q_0 \cdot |U_{rel e0}| \cdot \frac{m_e}{e^2} \cdot j + \eta_{ei} \cdot j, \end{aligned} \quad (51)$$

wobei nach Spitzer (senkrecht zu starkem Magnetfeld)

$$\eta_{ei} = \frac{\pi^{3/2} \cdot m_e^{1/2} \cdot e^2 \cdot \ln \Lambda}{2 \cdot (2 k T_e)^{3/2} \cdot 0,5816}$$

mit  $\Lambda$  aus Formel (49).

Mit eingesetzten Zahlen, in ESE:

$$\eta / ESE = 1,178 \cdot 10^{-32} \cdot \ln \Lambda \cdot (k T_e / \text{erg})^{-3/2} + \quad (52)$$

$$+ \frac{n_0}{n} \cdot 3,948 \cdot 10^{-9} \left\{ S_{12} / \text{cm}^3 \text{sec}^{-1} + Q_0 / \text{cm}^2 \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k T_e}{m_e} + |\omega_e - \omega_0|^2} \right\} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

### Wärmeleitfähigkeiten

Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_0$  des Neutralgases wird wieder berechnet nach (korrigierten) Formeln der kinetischen Gastheorie, was nach Finkelburg und Maecker [17] zumindest in der Physik des Lichtbogens "sehr brauchbare Werte" liefert.

Als Ansatz dient:

$$\kappa_0 = \frac{1}{3} n_0 v_0 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} k \cdot l_0 \quad (53)$$

$v_0$  ist die mittlere thermische Geschwindigkeit und  $l_0$  die freie Weglänge für Neutralteilchen. Bei ihrer Berechnung werden Atom-Elektronen-Stöße wegen des geringen Energieaustausches gegenüber Ion-Atom-Stößen vernachlässigt. Dann gilt:

$$l_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} P_{00}\right) \cdot \sqrt{2} \cdot n_0 \cdot Q_{00} + \left(1 - \frac{1}{2} P_{0i}\right) \sqrt{1 + \frac{m_0}{m_i}} n_i \cdot Q_{0i}}$$

$Q_{00} \equiv$  Stoßquerschnitt Atom-Atom,

$Q_{0i} \equiv$  Stoßquerschnitt Atom-Ion,

$P_{0j}$  ( $j = 0, i$ ) sind die sog. Persistenzen (Maß für die Beibehaltung der Geschwindigkeitsrichtung über einen Stoß hinweg), die dargestellt sind durch

$$P_{0j} = \frac{m_0 - 0,2 m_j}{m_0 + m_j}$$

Für  $m_{H^+} = m_H$  ergibt  $P_{Oj} = 0,4$ .  $Q_{Oo}$  ist bei Formel (33) schon zu

$$Q_{Oo} = \pi \cdot 2,39^2 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

angegeben worden.

Bei  $Q_{oi}$  sind elastische und Ladungsaustauschstöße zu berücksichtigen:

$$Q_{oi} = \sigma_E (v_{rel i o}) + Q_u (v_{rel i o}) .$$

Folglich gilt:

$$K_o = 2,56 \cdot \frac{k}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT_o}{m_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 0,8 (\pi \cdot 2,39^2 \cdot 10^{-16} + \frac{n}{n_o} (\sigma_E + Q_u))} \quad (54)$$

Statt der Eucken-Korrektur  $5/2$  in (53) wurde hier der von Chapman verbesserte Wert  $2,56$  eingeführt. Nach Zusammenfassung der Zahlenwerte gewinnt man schließlich:

$$K_o \left| \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{sec} \cdot \text{cm}} \right. = 1,806 \cdot \frac{k \left| \frac{\text{erg}}{\text{grad}} \right. \cdot \left( \frac{kT_o}{m_o} \left| \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \right. \right)^{1/2}}{1,79 \cdot 10^{-15} + \frac{n}{n_o} (\sigma_E / \text{cm}^2 + Q_u / \text{cm}^2)} .$$

Die Wärmeleitfähigkeit  $K_{pi}$  der Ionen für ein Plasma ohne Neutralgas berechnete H. Fisser (I.P.P. München-Garching) zu

$$K_{pi} = \frac{25 \cdot n \cdot kT_i}{4 \cdot \sigma \cdot \gamma_i} \cdot \frac{k}{m_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{6,25}{\sigma^2} \cdot \frac{\Omega^2}{\gamma_i^2}} , \quad (55)$$

wobei

$$\sigma = \sqrt{2} + \frac{15}{2} \left( \frac{T_i}{T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot \sqrt{2\pi}}{3} \cdot \frac{e^4 \cdot \ln \Lambda \cdot n}{(kT_i)^{\frac{3}{2}} \cdot m_i^{\frac{1}{2}}} ;$$

$$\Omega = \frac{eB_z}{m_i \cdot c} ;$$

Die Korrektur für das Neutralgas wird nun nach (53) folgendermaßen hinzugefügt:

$$K_i = \frac{5}{4} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi \cdot m_i}} \cdot R \cdot \frac{1}{n(c_1 \cdot Q_{ii} + c_2 \cdot Q_{ie}) + n_0 \cdot c_3 \cdot Q_{i0}}$$

oder, wenn für  $c_3$  die Korrekturfaktoren aus  $l_0$  eingesetzt werden:

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{\text{Plasma}}} + \frac{n_0}{n} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{2} (\sigma_E + Q_u) \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{R} \left( \frac{8kT_i}{\pi m_i} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Für  $K_{\text{Plasma}}$  wird das Fissersche  $K_{p_i}$  gewählt, so daß

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{p_i}} + \frac{1}{R} \cdot 0,567 \cdot \frac{n_0}{n} (\sigma_E + Q_u) \cdot \left( \frac{kT_i}{m_i} \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (56)$$

Die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen  $K_e$  soll nach dem-  
selben Schema verbessert werden. Für vollionisiertes  
Plasma gibt H. Fisser an:

$$K_{pe} = \frac{25 \cdot n_e \cdot kT_e}{4 \cdot \lambda \cdot \gamma_e} \cdot \frac{k}{m_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{25}{\lambda(4\lambda-9)} \cdot \frac{\omega^2}{\gamma_e^2}}, \quad (57)$$

mit

$$\lambda = \sqrt{2} + \frac{13}{4} = 4,6642 ;$$

$$\gamma_e = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{e^4 \cdot \ln \Lambda \cdot n_e}{(kT_e)^{3/2} \cdot m_e^{1/2}} ;$$

$$\omega = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{B_z}{c} .$$

Da man in diesem Fall die Persistenz nach [18] durch  
die Formel

$$P_{e0} = \frac{m_e}{m_e + m_0} \approx \frac{m_e}{m_0}$$

ausdrückt, erhalten wir für die korrigierte reziproke  
Leitfähigkeit:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_{pe}} + \frac{1}{k} \cdot \frac{n_0}{n} \cdot Q_0(v_{rel e0}) \cdot 0,5012 \cdot \left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{-1/2} . \quad (58)$$

Zahlenwerte für Wasserstoffplasma:

$$\sigma = 1,4142 + 0,175 \left( \frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} .$$

$$\gamma_i = 1,3752 \cdot 10^{-25} \cdot \ln \Lambda \cdot n / \text{cm}^3 \cdot (kT_i / \text{erg})^{-3/2} [\text{sec}^{-1}] .$$

$$\Omega = 9,5794 \cdot 10^3 \cdot B_z / T [\text{sec}^{-1}] .$$

$$\gamma_e = 5,893 \cdot 10^{-24} \ln \Lambda \cdot n / \text{cm}^3 \cdot (kT_e / \text{erg})^{-3/2} [\text{sec}^{-1}] .$$

$$\omega = 1,759 \cdot 10^7 \cdot B_z / T [\text{sec}^{-1}] .$$

Reibungswärme  $r(\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0)^2$

Die aus der gerichteten Bewegung resultierende Erwärmung der aneinander reibenden Gase wird nach folgendem einfachen Modell berechnet: Ein Ionenstrom bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_0$  durch das neutrale Gas. Dabei wird durch Stöße Energie übertragen. Es muß also zuerst der Energieübertrag pro Stoß ausgerechnet werden. Da aber nur der thermische Anteil des Energieaustausches gefragt ist, muß vom gesamten Energieaustausch die kinetische Energie der gerichteten Bewegung nach dem Stoß wieder abgezogen werden. Vom Einzelstoß her gesehen, heißt das, daß nur die

Komponente der Geschwindigkeit (nach dem Stoß) berücksichtigt werden darf, die senkrecht zur gerichteten Geschwindigkeit liegt, weil sie durch den Stoß für die gerichtete Bewegung verloren ist. Dadurch sind Ladungsaustauschstöße (in der hier verwendeten Vereinfachung!) von vornherein ausgeschlossen, weil bei diesen keine senkrechte Geschwindigkeitskomponente auftritt.

Der Energieverlust eines Teilchens beim elastischen Stoß ist -  $w_A$  sei die Anfangsgeschwindigkeit -

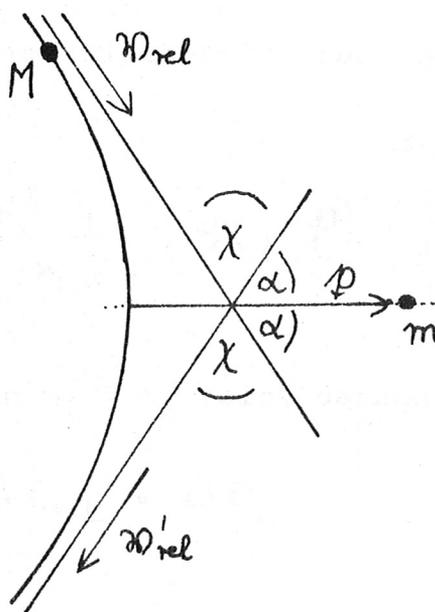
$$\Delta \varepsilon = \frac{m}{2} (w'^2 - w_A^2) .$$

Die Geschwindigkeit  $w'$  nach dem Stoß ist allgemein gegeben durch:

$$w' = w_A + 2 \frac{M}{M+m} (w_{rel} \cdot \rho) \rho$$

$\rho$  soll der Einheitsvektor in Richtung Atom-Ion bei ihrem kleinsten Abstand während des Stoßes sein (s. Skizze 5).

Skizze 5



Die benötigte Komponente senkrecht zu  $\mathcal{W}_{rel}$  ist dann

$$\mathcal{W}'_{\perp} = \mathcal{W}' - \left( \mathcal{W}' \cdot \frac{\mathcal{W}_{rel}}{U_{rel}} \right) \cdot \frac{\mathcal{W}_{rel}}{U_{rel}} .$$

Zunächst sei die Rechnung für die neutralen Atome ( $m_0$ ) durchgeführt, also für  $\mathcal{W}_A = 0$ . Dann ist

$$\Delta \varepsilon_{0\perp} = \frac{m_0}{2} \mathcal{W}'_{\perp}{}^2$$

und

$$\mathcal{W}'_{\perp} = 2 \cdot \frac{m_i}{m_i + m_0} \cdot \left\{ (\mathcal{W}_{rel} \cdot \rho) \rho - (\mathcal{W}_{rel} \rho) \left( \rho \frac{\mathcal{W}_{rel}}{U_{rel}} \right) \cdot \frac{\mathcal{W}_{rel}}{U_{rel}} \right\} ,$$

das heißt

$$\Delta \varepsilon_{0\perp} = \frac{m_0 \cdot m_i^2 \cdot 4}{2 (m_i + m_0)^2} \cdot (\mathcal{W}_{rel} \cdot \rho)^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) .$$

Einen dazu ganz symmetrischen Ausdruck gewinnt man für die Ionen ( $m_i$ ):

$$\Delta \varepsilon_{i\perp} = \frac{m_i \cdot m_0^2 \cdot 4}{2 \cdot (m_i + m_0)^2} \cdot (\mathcal{W}_{rel} \cdot \rho)^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) .$$

Bei gleichen Massen  $m_i = m_0$  folgt daraus, daß

$$\Delta \varepsilon_{0\perp} = \Delta \varepsilon_{i\perp} = \Delta \varepsilon_{\perp} .$$

Aus Skizze 5 sieht man, daß

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos \chi)$$

ist, und somit

$$\begin{aligned} \Delta E_{\perp} &= \frac{m}{2} \cdot v_{\text{rel}}^2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \chi)(1 + \cos \chi) = \\ &= \frac{m}{8} \cdot (\omega_i - \omega_o)^2 \cdot \sin^2 \chi \end{aligned}$$

Multiplikation mit der (halb-)differentiellen Stoßfrequenz ergibt:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{m}{8} (\omega_i - \omega_o)^2 \cdot \sin^2 \chi \cdot d\sigma \cdot n_o \cdot n \cdot v_{\text{rel}io}$$

Die restliche Integration über den Stoßquerschnitt führt offenbar gerade auf  $\sigma_E$  aus der Formel (35).

Insgesamt also:

$$\begin{aligned} \tau \cdot (\omega_i - \omega_o)^2 &= \frac{m}{8} \cdot \sigma_E \cdot n \cdot n_o \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi} \left( \frac{kT_i}{m_i} + \frac{kT_o}{m_o} \right) + |\omega_i - \omega_o|^2} \times (59) \\ &\quad \times (\omega_i - \omega_o)^2 \end{aligned}$$

VI) Zusammenstellung des Gleichungssystems

In diesem Kapitel soll eine Übersicht über das vollständige Gleichungssystem gegeben werden, wie es zur numerischen Auswertung gelangt.

- a) Kontinuitätsgleichung für das Neutralgas, nach den Formeln (5), (25), (36), (37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} = & - v_{r0} \frac{\partial n_0}{\partial r} - n_0 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{0r}) - \\ & - n_0 \cdot n \cdot S_{12} + n^2 \cdot Q_{21} . \end{aligned} \quad (60)$$

- b) Kontinuitätsgleichung für das Plasma, nach den Formeln (11), (25), (36), (37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = & - v_r \cdot \frac{\partial n}{\partial r} - n \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \\ & + n_0 \cdot n \cdot S_{12} - n^2 \cdot Q_{21} . \end{aligned} \quad (61)$$

- c) Impulsgleichung für das Neutralgas in r-Richtung, nach den Formeln (8), (25), (36), (37), (22), (26), (41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{0r}}{\partial t} = & - v_{0r} \frac{\partial v_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} v_{0\varphi}^2 - \frac{1}{n_0 \cdot m_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (n_0 k T_0) + \\ & + \frac{1}{n_0 \cdot m_0} \cdot (n^2 \cdot Q_{21} \cdot m + \gamma) \cdot (v_r - v_{0r}) . \end{aligned} \quad (62)$$

- d) Impulsgleichung für das Neutralgas in  $\varphi$ -Richtung,  
nach den Formeln (8), (25), (37), (22), (32), (31),  
(34), (38)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{0\varphi}}{\partial t} = & -U_{0r} \frac{\partial U_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot U_{0\varphi} \cdot U_{0r} + \\ & + \frac{1}{n_0 \cdot m_0} (U_{\varphi} - U_{0\varphi}) \cdot \left\{ n^2 \cdot Q_{21} \cdot m + \right. \quad (63) \\ & + n_i \cdot n \left[ m \cdot |U_{reliol}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) + m_e |U_{releol}| \cdot Q_0 \right] \left. \right\} - \\ & - \frac{n_0 \cdot m_e}{n_0 \cdot m \cdot e} \cdot j_{\varphi} \cdot \left\{ |U_{releol}| \cdot Q_0 - |U_{reliol}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) \right\}. \end{aligned}$$

- e) Impulsgleichung für das Plasma in r-Richtung,  
nach den Formeln (14), (22), (25), (27), (36), (41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} = & -U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} U_{\varphi}^2 + \frac{m_e}{m_i \cdot n \cdot e^2} \cdot \frac{1}{r} j_{\varphi}^2 - \\ & - \frac{1}{n \cdot m} \cdot \frac{\partial (n k T_i + n k T_e)}{\partial r} + \frac{1}{n \cdot m} \cdot j_{\varphi} \cdot \frac{B_z}{c} - \\ & - \frac{n_0 \cdot n}{n \cdot m} (m \cdot S_{12} + \gamma) \cdot (U_r - U_{0r}) . \end{aligned} \quad (64)$$

- f) Impulsgleichung für das Plasma in  $\varphi$ -Richtung,  
nach den Formeln (14), (22), (27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} = & -v_r \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} v_r \cdot v_{\varphi} - (v_{\varphi} - v_{0\varphi}) \cdot \left\{ n_0 s_{12} + \right. \\ & \left. + n_0 \cdot \left[ |v_{rel\ iol}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) + |v_{rel\ eol}| \cdot Q_0 \cdot \frac{m_e}{m_0} \right] \right\} + \\ & (65) \\ & + \frac{n_0}{n} \cdot \frac{m_e}{m} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left\{ |v_{rel\ eol}| \cdot Q_0 - \right. \\ & \left. - |v_{rel\ iol}| \cdot \left( \frac{\sigma_D}{2} + Q_u \right) \right\} \cdot j_{\varphi} \cdot \end{aligned}$$

In z-Richtung wirkt keine äußere Kraft, so daß die Geschwindigkeitskomponenten in dieser Richtung nicht betrachtet werden müssen.

- g) Temperaturgleichung für das Neutralgas,  
nach den Formeln (15), (25), (28), (54)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (kT_0)}{\partial t} = & -v_{or} \frac{\partial (kT_0)}{\partial r} - \frac{2}{3} (kT_0) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{or}) + \\ & (66) \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k_0 \frac{\partial T_0}{\partial r}) + \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n_0} (kT_e - kT_0) + \\ & + \left( \frac{n^2}{n_0} \cdot Q_{21} + \frac{2}{3} \frac{\beta}{n_0} \right) (kT_i - kT_0) + \frac{\tau}{n_0} \cdot \frac{2}{3} (n_i - n_0)^2. \end{aligned}$$

h) Temperaturgleichung für die Ionen ( $H^+$ ),  
nach den Formeln (16), (29), (56)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(kT_i)}{\partial t} = & -v_r \cdot \frac{\partial(kT_i)}{\partial r} - \frac{2}{3}(kT_i) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \quad (67) \\ & + \frac{1}{t_{eq}} (kT_e - kT_i) - \left( \frac{2}{3} \frac{\beta}{n} + n_0 \cdot S_{12} \right) (kT_i - kT_0) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{r}{n} (w_i - w_0)^2. \end{aligned}$$

i) Temperaturgleichung für die Elektronen,  
nach den Formeln (17), (25), (30), (58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(kT_e)}{\partial t} = & -v_r \frac{\partial(kT_e)}{\partial r} - \frac{2}{3}(kT_e) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_i \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) - n_0 \cdot S_{12} \left( \frac{2}{3} \chi + kT_e \right) - \\ & - \frac{1}{t_{eq}} (kT_e - kT_i) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{n} (kT_e - kT_0) + \\ & + \eta \cdot \left( -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)^2. \quad (68) \end{aligned}$$

k) Gleichung für das Magnetfeld,  
nach den Formeln (24), (52)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} = & -v_r \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} - B_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \cdot \eta \cdot c^2}{4\pi} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Insgesamt liegt also in a) bis k) ein System von zehn partiellen, gekoppelten Differentialgleichungen vor für die zehn Funktionen:

$n_o(r,t)$ ,  $n(r,t)$ ,  $v_{or}(r,t)$ ,  $v_{o\varphi}(r,t)$ ,  $v_r(r,t)$ ,

$v_\varphi(r,t)$ ,  $T_o(r,t)$ ,  $T_i(r,t)$ ,  $T_e(r,t)$  und  $B_z(r,t)$ .

Bei gegebenen, geeigneten Anfangs- und Randbedingungen kann man, wenigstens vom Standpunkt der numerischen (Differenzen-) Rechnung aus gesehen, eine Lösung erwarten.

C) Numerische Lösung des Gleichungssystems

I) Einheitensystem

Die Rechenmaschine IBM 7090 kann nur mit Zahlen aus dem Bereich von  $10^{-38}$  bis  $10^{+38}$  sinnvoll arbeiten. Man muß daher günstige Einheiten wählen, um bei allen möglichen Zwischenrechnungen diesen Bereich nicht zu verlassen. Das dem vorliegenden Problem angepaßte Einheitensystem wurde von K.V. Roberts (Culham Laboratory, Culham/Abingdon (Berks.)) angegeben. In der folgenden Zusammenstellung sind die neuen "Maschineneinheiten" mit dem Index "M 1" versehen.

Teilchenzahldichte:  $n_{M1} = 10^{+16}$  Teilchen  $\cdot$   $\text{cm}^{-3}$

Masse:  $m_{M1} = 1,65975 \cdot 10^{-24} \cdot 10^{16} \cdot A$  Gramm

A ist das Atomgewicht der physikalischen Skala.

Länge:  $l_{M1} = 1$  cm

Zeit:  $t_{M1} = 10^{-6}$  sec

Temperatur:  $T_{M1} = \left(\frac{kT}{m}\right) \cdot 10^{-12} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}$

m bedeutet die Atommasse. Vom dem in erg oder eV angegebenen Ausdruck kT gelangt man dann zur "Maschinentemperatur"  $T_{\text{Masch}}$  durch:

$$T_{\text{Masch}} = \frac{0,96511}{A} \cdot (kT)_{\text{eV}}$$
$$= \frac{10^{12}}{1,65975 \cdot A} \cdot (kT)_{\text{erg}}$$

Magnetfeld:

Die Alfvèngeschwindigkeit

$$v_{Al} = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

legt die Einheit für B fest:

$$B_{M1} = \sqrt{4\pi\rho_{M1}} \cdot v_{M1}$$

$$= \sqrt{4\pi \cdot 1,65975 \cdot A} \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \text{ Gauß}$$

$$= 0,4567 \cdot \sqrt{A} \text{ kT.}$$

Auf diese Einheiten sind im folgenden alle Größen bezogen, wenn nichts anderes ausdrücklich angezeigt ist.

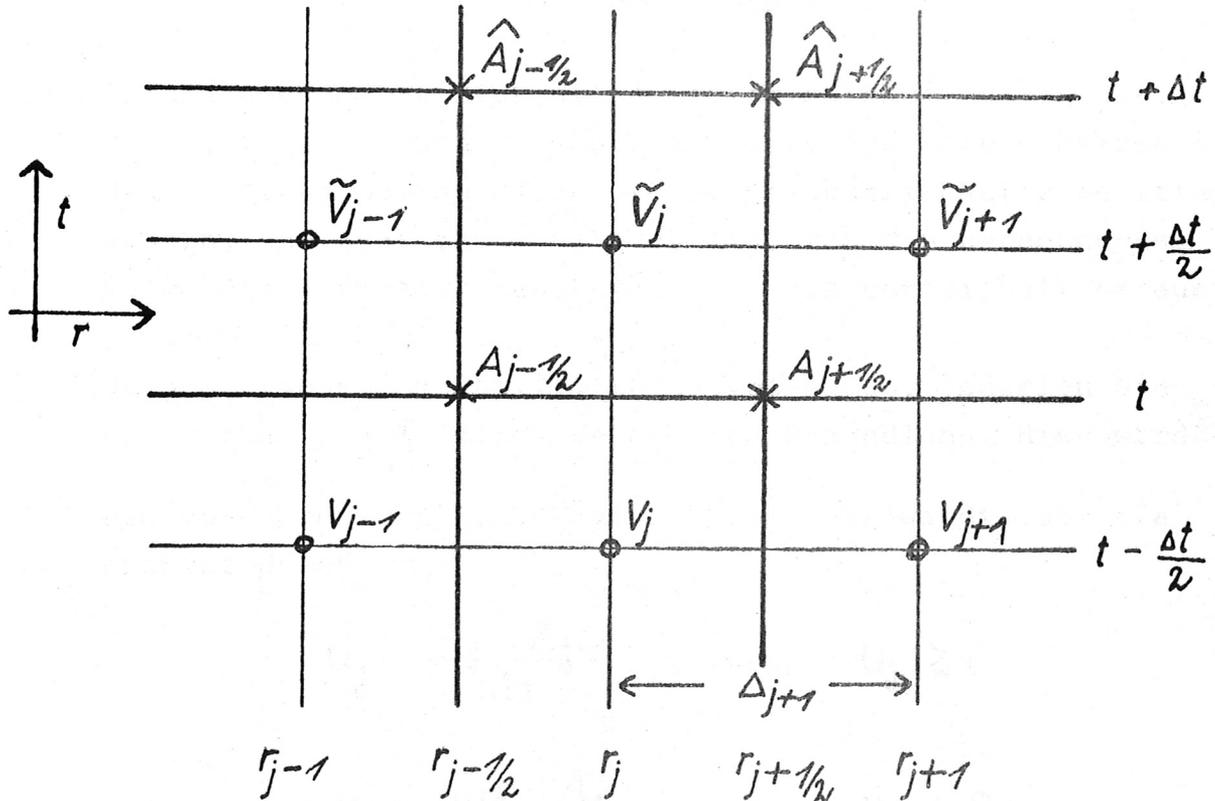
## II) Differenzgleichungen

Bei der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen wird die (räumliche) Koordinatenachse dargestellt durch eine Kette von Punkten  $r_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). An diesen Orten sind zu einer Zeit  $t$  alle Funktionen  $A(r, t)$  als Vektoren  $A(r_j, t)$  bekannt. Gesucht sind die  $A(r_j, t + \Delta t)$  zur Zeit  $t + \Delta t$ . Die üblichen Abkürzungen sind:

$$A_j \quad \text{für} \quad A(r_j, t) \quad (j = 1, \dots, N)$$

$$\hat{A}_j \quad \text{für} \quad A(r_j, t + \Delta t)$$

$$\tilde{A}_j \quad \text{für} \quad A(r_j, t + \frac{\Delta t}{2})$$



Skizze 6

a) Explizite Lösungsmethode

Bei diesem Verfahren werden die Differentialquotienten einer Gleichung derart durch Differenzenquotienten angenähert, daß man nach der Unbekannten  $\hat{A}_j$  auflösen und diese sukzessive - für jedes  $j$  einzeln - berechnen kann.

Die Kontinuitäts- und Impulsgleichungen (60) mit (65) sollen auf diese Weise gelöst werden.

Die Ergebnisse der Rechnungen haben erwiesen, daß  $U_\varphi$  und  $U_{0\varphi}$  sehr klein sind; deshalb wurden sie aus den folgenden Differenzgleichungen der Einfachheit halber weggelassen. Damit ist auch der Index "r" in  $U_r$  und  $U_{0r}$  überflüssig, so daß jetzt gilt

$$U_r = U \quad \text{und} \quad U_{0r} = U_0 .$$

Es ist zweckmäßig, für diese Geschwindigkeiten ein eigenes, verschobenes r-t-Netz zu verwenden (siehe Skizze 6!); denn erstens müßten diese Größen besonders häufig gemittelt werden, und zweitens stellt es sich für die Berechnungsfolge der verschiedenen Funktionen als vorteilhaft heraus.

Um numerische Instabilitäten zu vermeiden, bedürfen die Ausdrücke  $U \cdot \frac{\partial A}{\partial r}$  einer besonderen Behandlung. Hier wird das Verfahren von R. Lelevier [19] angewandt, der sie ersetzt durch

$$U_j \cdot \frac{A_j - A_{j-1}}{\Delta r} , \quad \text{wenn} \quad U_j \geq 0$$

und

$$U_j \cdot \frac{A_{j+1} - A_j}{\Delta r} , \quad \text{wenn} \quad U_j < 0$$

Aus Gleichung (61) gewinnt man  $\left( \frac{1}{2} (\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j+1}) =: \tilde{v}_{j+1/2} \right)$ :

$$\frac{\hat{n}_{j+1/2} - n_{j+1/2}}{\Delta t} = - \tilde{v}_{j+1/2} \cdot \begin{cases} \frac{n_{j+1/2} - n_{j-1/2}}{\Delta_{j+1/2}}, & \text{für } \tilde{v}_{j+1/2} \geq 0 \\ \frac{n_{j+3/2} - n_{j+1/2}}{\Delta_{j+3/2}}, & \text{für } \tilde{v}_{j+1/2} < 0 \end{cases}$$

$$- \frac{\hat{n}_{j+1/2} + n_{j+1/2}}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{j+1/2}} \cdot \frac{\tau_{j+1} \tilde{v}_{j+1} - \tau_j \tilde{v}_j}{\Delta_{j+1}} - \quad (70)$$

$$- n_{j+1/2} \cdot \hat{n}_{j+1/2} \cdot Q_{21j+1/2} + \frac{1}{2} (n_{0j+1/2} \cdot \hat{n}_{j+1/2} + n_{j+1/2} \cdot \hat{n}_{0j+1/2}) \cdot S_{12j+1/2}.$$

Diese Gleichung kann man nach  $\hat{n}_{j+1/2}$  auflösen, wie es für die Neutralgasdichte aus (60) in der folgenden Formel schon geschehen ist:

$$\hat{n}_{0j+1/2} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{j+1/2}} \cdot \frac{\tau_{j+1} \tilde{v}_{0j+1} - \tau_j \tilde{v}_{0j}}{\Delta_{j+1}} + \frac{1}{2} n_{j+1/2} \cdot S_{12j+1/2} \right) =$$

$$= - \tilde{v}_{0j+1/2} \cdot \begin{cases} \frac{n_{0j+1/2} - n_{0j-1/2}}{\Delta_{j+1/2}}, & \text{für } \tilde{v}_{0j+1/2} \geq 0 \\ \frac{n_{0j+3/2} - n_{0j+1/2}}{\Delta_{j+3/2}}, & \text{für } \tilde{v}_{0j+1/2} < 0 \end{cases} +$$

$$+ n_{j+1/2} \cdot \hat{n}_{j+1/2} \cdot Q_{21j+1/2} - \quad (71)$$

$$- n_{0j+1/2} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{j+1/2}} \cdot \frac{\tau_{j+1} \tilde{v}_{0j+1} - \tau_j \tilde{v}_{0j}}{\Delta_{j+1}} + \frac{1}{2} \hat{n}_{j+1/2} \cdot S_{12j+1/2} - \frac{1}{\Delta t} \right\}.$$

Gleichung Die Impulsgleichung für das Neutralgas (62) geht über in:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{r b_j}{2} \right) \tilde{v}_{0j} = - v_{0j} \cdot \begin{cases} \frac{v_{0j} - v_{0j-1}}{\Delta_j} , & \text{für } v_{0j} \geq 0 \\ \frac{v_{0j+1} - v_{0j}}{\Delta_{j+1}} , & \text{für } v_{0j} < 0 \end{cases}$$

$$- \frac{2}{n_{0j+\frac{1}{2}} + n_{0j-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n_{0j+\frac{1}{2}} \cdot T_{0j+\frac{1}{2}} - n_{0j-\frac{1}{2}} \cdot T_{0j-\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} +$$

(72)

$$+ \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{r b_j}{2} \right) \cdot v_{0j} + \frac{r b_j}{2} \cdot (\tilde{v}_j + v_j) .$$

Dabei sind die Koeffizienten von  $(v_{0j} - v_{0j-1})$  aus (62) zu  $r b$  bzw.  $r b_p$  aus (64) zusammengefaßt.

Gleichung (64) liefert:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\tau b p_j}{2} \right) \cdot \tilde{U}_j = -U_j \begin{cases} \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta_j}, & \text{für } U_j \geq 0 \\ \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta_{j+1}}, & \text{für } U_j < 0 \end{cases}$$

$$+ 11,285 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{r_j} \left( \frac{B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}}{(n_{j+\frac{1}{2}} + n_{j-\frac{1}{2}}) \cdot \Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right)^2 -$$

(73)

$$- \frac{B_{j+\frac{1}{2}} + B_{j-\frac{1}{2}}}{n_{j+\frac{1}{2}} + n_{j-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{\tau b p_j \cdot U_j}{2} +$$

$$- \tau b p_j \cdot \frac{(\tilde{U}_j + U_{0j})}{2} + \frac{1}{\Delta t} \cdot U_j -$$

$$- \frac{2}{n_{j+\frac{1}{2}} + n_{j-\frac{1}{2}}} \cdot \left[ \frac{n_{j+\frac{1}{2}} (T_{ij+\frac{1}{2}} + T_{e_{j+\frac{1}{2}}}) - n_{j-\frac{1}{2}} (T_{ij-\frac{1}{2}} + T_{e_{j-\frac{1}{2}}})}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. + \frac{n_{j+\frac{1}{2}} \cdot Q_{j+\frac{1}{2}} - n_{j-\frac{1}{2}} \cdot Q_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right] \cdot$$

Der letzte Term in der eckigen Klammer rührt her von einer künstlichen Viskosität, die J. von Neumann zur Behandlung von Stoßwellen eingeführt hat. Näheres darüber ist in [20] und [21] zu finden. Ist L die Länge, über die die Stoßfront auseinandergesogen werden soll, dann bedeutet

$$Q_1 = \begin{cases} L^2 \cdot (\operatorname{div} v)^2 = L^2 \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right)^2, & \text{für } \operatorname{div} v < 0 \\ 0 & , \text{für } \operatorname{div} v \geq 0. \end{cases}$$

b) Implizite Lösungsmethode

Enthält eine Gleichung Diffusionsterme (zweite Ableitungen nach der Ortskoordinate), dann können in der zugehörigen Differenzengleichung nicht nur  $\hat{A}_j$ , sondern auch  $\hat{A}_{j-1}$  und  $\hat{A}_{j+1}$  zugleich als Unbekannte auftreten. Man ist also gezwungen, ein System - für alle j gleichzeitig - zu lösen (implizite Bestimmung von  $\hat{A}_j$ !). In [22] ist dazu ein Lösungsverfahren angegeben und diskutiert:

Man kann die betreffenden Differenzengleichungen stets auf die Form bringen:

$$-K_j \cdot \hat{A}_{j+1} + L_j \hat{A}_j - M_j \cdot \hat{A}_{j-1} = N_j \quad (74)$$

$K_j, L_j, M_j$  und  $N_j$  sind aus bekannten Größen zusammengesetzt. Man sucht nun einen Satz von Größen  $E_j$  und  $F_j$  so, daß

$$\hat{A}_j = E_j \hat{A}_{j+1} + F_j \quad (75)$$

Für  $j = 1$  folgen  $E_j$  und  $F_j$  aus den Randbedingungen. Bis  $j = N-1$  gelten dann folgende Rekursionsformeln:

$$E_j = \frac{K_j}{L_j - M_j \cdot E_{j-1}}$$

$$F_j = \frac{N_j + M_j \cdot F_{j-1}}{L_j - M_j \cdot E_{j-1}}$$

$\hat{A}_N$  ist wieder durch eine Randbedingung festgelegt. Somit können zuerst die  $E_j$  und  $F_j$  von  $j = 1 \dots N-1$  ausgerechnet werden und darauf von  $j = N$  bis 1 nach (75) die gesuchten  $\hat{A}_j$ .

Für dieses Verfahren wird nun Gleichung (69) vorbereitet:

$$\frac{\hat{B}_{j+1/2} - B_{j+1/2}}{\Delta t} = - \tilde{U}_{j+1/2} \cdot \begin{cases} \frac{B_{j+1/2} - B_{j-1/2}}{\Delta_{j+1/2}}, & \text{für } \tilde{U}_{j+1/2} \geq 0 \\ \frac{B_{j+3/2} - B_{j+1/2}}{\Delta_{j+3/2}}, & \text{für } \tilde{U}_{j+1/2} < 0 \end{cases} \quad (76)$$

$$- \frac{(\hat{B}_{j+1/2} + B_{j+1/2})}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{j+1/2}} \cdot \frac{\tau_{j+1} \tilde{U}_{j+1} - \tau_j \tilde{U}_j}{\Delta_{j+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_{j+1/2}} \cdot \frac{c^2}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{r_{j+1} \eta_{j+1} (\hat{B}_{j+3/2} - \hat{B}_{j+1/2})}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+3/2}} - \frac{r_j \eta_j (\hat{B}_{j+1/2} - \hat{B}_{j-1/2})}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+1/2}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_{j+1/2}} \cdot \frac{c^2}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{r_{j+1} \eta_{j+1} \cdot (B_{j+3/2} - B_{j+1/2})}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+3/2}} - \frac{r_j \cdot \eta_j \cdot (B_{j+1/2} - B_{j-1/2})}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+1/2}} \right\}, \quad (76)$$

Sammelt man nach dem Schema (74) alle zusammengehörigen Glieder, so folgen aus (76) sofort die  $K_{j+1/2}$ ,  $L_{j+1/2}$ ,  $M_{j+1/2}$  und  $N_{j+1/2}$ .

In der folgenden Gleichung für die Neutralgastemperatur (aus (66)) werden diese Größen gleich angegeben, wobei zur Abkürzung eingeführt wurde:

$$W_{L_0} = \frac{R_0}{R} \quad ; \quad A_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{n_0} \quad ; \quad B_0 = \frac{2}{3} \frac{\beta}{n_0} \quad ;$$

$$R_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{|n_i - n_0|^2 \cdot r}{n_0 \cdot m}.$$

$$- K_{j+1/2}^{T_0} \cdot \hat{J}_{0j+3/2} + L_{j+1/2}^{T_0} \cdot \hat{J}_{0j+1/2} - M_{j+1/2}^{T_0} \cdot \hat{J}_{0j-1/2} = N_{j+1/2}^{T_0}. \quad (77)$$

$$K_{j+\frac{1}{2}}^{T_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \cdot W_{Loj+1}}{\Delta_{j+\frac{3}{2}} \cdot \Delta_{j+1}} ;$$

$$M_{j+\frac{1}{2}}^{T_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_j \cdot W_{Loj}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \cdot \Delta_{j+1}} ;$$

$$L_{j+\frac{1}{2}}^{T_0} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j \cdot r_j}{\Delta_{j+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( A_{oj+\frac{1}{2}} + \frac{n_{j+\frac{1}{2}} \cdot \hat{n}_{j+\frac{1}{2}} \cdot 2}{(\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}})} \cdot Q_{21j+\frac{1}{2}} + B_{oj+\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{(\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}})} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\Delta_{j+1}} \left( \frac{r_{j+1} \cdot W_{Loj+1}}{\Delta_{j+\frac{3}{2}}} + \frac{r_j \cdot W_{Loj}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right) ;$$

$$\begin{aligned}
 N_{j+\frac{1}{2}}^{T_0} &= \left( \frac{1}{\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \cdot W_{Loj+1}}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+\frac{3}{2}}} \right) \cdot T_{oj+\frac{3}{2}} + \\
 &+ \left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \cdot \tilde{v}_{j+1} - r_j \tilde{v}_j}{\Delta_{j+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \left( A_{oj+\frac{1}{2}} + \frac{n_{j+\frac{1}{2}} \cdot \hat{n}_{j+\frac{1}{2}} \cdot 2}{\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}}} \cdot Q_{21j+\frac{1}{2}} + B_{oj+\frac{1}{2}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}})} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{r_{j+1} \cdot W_{Loj+1}}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+\frac{3}{2}}} + \frac{r_j \cdot W_{Loj}}{\Delta_{j+1} \cdot \Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right) \right] \cdot T_{oj+\frac{1}{2}} + \\
 &+ \frac{1}{\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_j \cdot W_{Loj}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \cdot \Delta_{j+1}} \cdot T_{oj-\frac{1}{2}} + \\
 &+ A_{oj+\frac{1}{2}} \left( \frac{\hat{T}_{ej+\frac{1}{2}} + T_{ej+\frac{1}{2}}}{2} \right) + R_{oj+\frac{1}{2}} + \\
 &+ \left( \frac{\hat{T}_{ij+\frac{1}{2}} + T_{ij+\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot \left( B_{oj+\frac{1}{2}} + \frac{n_{j+\frac{1}{2}} \cdot \hat{n}_{j+\frac{1}{2}} \cdot 2}{(\hat{n}_{oj+\frac{1}{2}} + n_{oj+\frac{1}{2}})} \cdot Q_{21j+\frac{1}{2}} \right) - \\
 &- \tilde{v}_{oj+\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \frac{T_{oj+\frac{1}{2}} - T_{oj-\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}}, & \text{für } \tilde{v}_{oj+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \frac{T_{oj+\frac{3}{2}} - T_{oj+\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{3}{2}}}, & \text{für } \tilde{v}_{oj+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

c) Lösungsmethode nach H. Fisser

Nach einem Vorschlag von H. Fisser (I.P.P. München-Garching) wird aus Gründen der numerischen Stabilität zur Berechnung von  $T_i$  und  $T_e$  der folgende Weg beschritten:

Die Wärmeleitung spielt keine sehr bedeutende Rolle. Sie wird folglich aus den Gleichungen zunächst weggelassen. Die beiden Restgleichungen werden dann als System gewöhnlicher Differentialgleichungen simultan gelöst. Also folgt aus (67) und (68)

$$\frac{dT_e}{dt} = \alpha \cdot T_e + \beta \cdot T_i + \delta ; \quad (78)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \beta \cdot T_e + \gamma \cdot T_i + \varepsilon ;$$

Mit den Abkürzungen:

$$AE = \frac{n_0}{n} \cdot A_0 ; \quad BJ = \frac{n_0}{n} \cdot B_0 ; \quad RJ = \frac{n_0}{n} \cdot R_0 ;$$

$$Wl = \frac{c^2}{4\pi} \cdot \eta$$

bedeuten dabei

$$\alpha = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \tilde{U}_{j+1} - r_j \tilde{U}_j}{\Delta_{j+1}} -$$

$$-\left( \frac{\hat{n}_{0j+\frac{1}{2}} + n_{0j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot S_{12j+\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{t_{eq}} \right)_{j+\frac{1}{2}} - AE_{j+\frac{1}{2}} ;$$

$$\beta = \left( \frac{1}{t_{eq}} \right)_{j+\frac{1}{2}} i$$

$$\delta = AE_{j+\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\hat{T}_{0j+\frac{1}{2}} + T_{0j+\frac{1}{2}}}{2} \right) - 8,641 \cdot S_{12j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\hat{n}_{0j+\frac{1}{2}} + n_{0j+\frac{1}{2}}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{4}{3} \cdot \frac{Wl_{j+\frac{1}{2}}}{\hat{n}_{j+\frac{1}{2}} + n_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \left| \frac{\hat{B}_{j+1} - \hat{B}_j}{\Delta_{j+1}} \right| \left| \frac{B_{j+1} - B_j}{\Delta_{j+1}} \right| -$$

$$- \tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \frac{T_{ej+\frac{1}{2}} - T_{ej-\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}}, & \text{für } \tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \frac{T_{ej+\frac{3}{2}} - T_{ej+\frac{1}{2}}}{\Delta_{j+\frac{3}{2}}}, & \text{für } \tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases}$$

$$\gamma = - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{r_{j+1} \tilde{U}_{j+1} - r_j \tilde{U}_j}{\Delta_{j+1}} - \left( \frac{1}{t_{eq}} \right)_{j+\frac{1}{2}} -$$

$$- \left( \frac{\hat{n}_{0j+\frac{1}{2}} + n_{0j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot S_{12j+\frac{1}{2}} - B_{j+\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\tau_{j+1/2}} \cdot \frac{\tau_{j+1} \tilde{U}_{j+1} - \tau_j \tilde{U}_j}{\Delta_{j+1}} \cdot Q|_{j+1/2} + \\ & + R|_{j+1/2} + \left( \frac{\hat{\tau}_{0j+1/2} + \tau_{0j+1/2}}{2} \right) \cdot \left[ B|_{j+1/2} + \frac{\hat{n}_{0j+1/2} + n_{0j+1/2}}{2} \cdot S_{12j+1/2} \right] - \\ & - \tilde{U}_{j+1/2} \cdot \begin{cases} \frac{\tau_{ij+1/2} - \tau_{ij-1/2}}{\Delta_{j+1/2}} & , \text{ für } \tilde{U}_{j+1/2} \geq 0 \\ \frac{\tau_{ij+3/2} - \tau_{ij+1/2}}{\Delta_{j+3/2}} & , \text{ für } \tilde{U}_{j+1/2} < 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{\gamma + \alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)^2}{4} + \beta^2} .$$

Da stets  $\beta^2 > 0$  gilt, ist  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  .

Für jede Stelle  $r_{j+1/2}$  sind dann die Lösungen des Systems (78):

$$\begin{aligned} \bar{T}_e = & \frac{(\lambda_2 - \alpha) \cdot T_e - \beta \cdot T_i}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_1 \Delta t} + \\ & + \frac{(\alpha - \lambda_1) \cdot T_e + \beta \cdot T_i}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta t} + \\ & + \frac{(\lambda_2 - \alpha) \cdot \delta - \beta \cdot \varepsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \frac{e^{\lambda_1 \Delta t} - 1}{\lambda_1} + \\ & + \frac{(\alpha - \lambda_1) \cdot \delta + \beta \cdot \varepsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \frac{e^{\lambda_2 \cdot \Delta t} - 1}{\lambda_2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = & \frac{(\lambda_2 - \alpha) \cdot T_e - \beta \cdot T_i}{\beta(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_1 \cdot \Delta t} \cdot (\lambda_1 - \alpha) + \\ & + \frac{(\alpha - \lambda_1) \cdot T_e + \beta \cdot T_i}{\beta(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta t} \cdot (\lambda_2 - \alpha) + \\ & + \frac{(\lambda_2 - \alpha) \cdot \delta - \beta \cdot \varepsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \beta} \cdot (\lambda_1 - \alpha) \cdot \frac{e^{\lambda_1 \Delta t} - 1}{\lambda_1} + \\ & + \frac{(\alpha - \lambda_1) \cdot \delta + \beta \cdot \varepsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \beta} \cdot (\lambda_2 - \alpha) \cdot \frac{e^{\lambda_2 \cdot \Delta t} - 1}{\lambda_2} . \end{aligned}$$

Für  $\lambda_1$  oder  $\lambda_2 = 0$  sind die Ausdrücke

$$\frac{e^{\lambda_i \cdot \Delta t} - 1}{\lambda_i} \quad \text{zu ersetzen durch } \Delta t \quad (i = 1, 2).$$

Diese so gewonnenen  $\bar{T}_i$  und  $\bar{T}_e$  werden noch in Wärmeleitungsgleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot WL \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \quad (79)$$

eingesetzt. (Alle übrigen Terme von (67) und (68) sind schon durch (78) vorweggenommen!)

Durch Lösung von (79) nach dem impliziten Schema kommt man auf die endgültigen Temperaturen  $\hat{T}_{ij+1/2}$  und  $\hat{T}_{ej+1/2}$ .

### III) Randbedingungen

Der äußere Rand wird an die Stelle  $r_{N+1/2}$ , der innere nach  $r_0$  verlegt.

Innen ergeben sich die Randbedingungen aus der Symmetrie des Problems und der Stetigkeit der Funktionen, so daß

$$A_{-1/2} = A_{+1/2} \quad (80)$$

für  $T_i$ ,  $T_e$ ,  $n$ ,  $n_0$ ,  $(U_\varphi, U_{0\varphi})$  und  $B$ , außerdem

$$U_{r/0} = 0 \quad \text{und} \quad U_{0r/0} = 0.$$

Für die implizit gelösten Gleichungen folgt aus (75) wegen (80)

$$E_{-1/2} = 1 \quad \text{und} \quad F_{-1/2} = 0 ;$$

somit

$$E_{1/2} = \frac{K_{1/2}}{L_{1/2} - M_{1/2}} ; \quad F_{1/2} = \frac{N_{1/2}}{L_{1/2} - M_{1/2}} .$$

Am äußeren Rand werden die Temperaturen konstant gehalten (siehe [23] ).

Die Geschwindigkeiten in  $r$ -Richtung sollen bei  $r_{N+1}$  verschwinden; (die in  $\varphi$ -Richtung wurden bei  $r_{N+1/2}$  Null gesetzt).

Die Dichten sollen bei einwärts gerichteter Bewegung abfallen wie

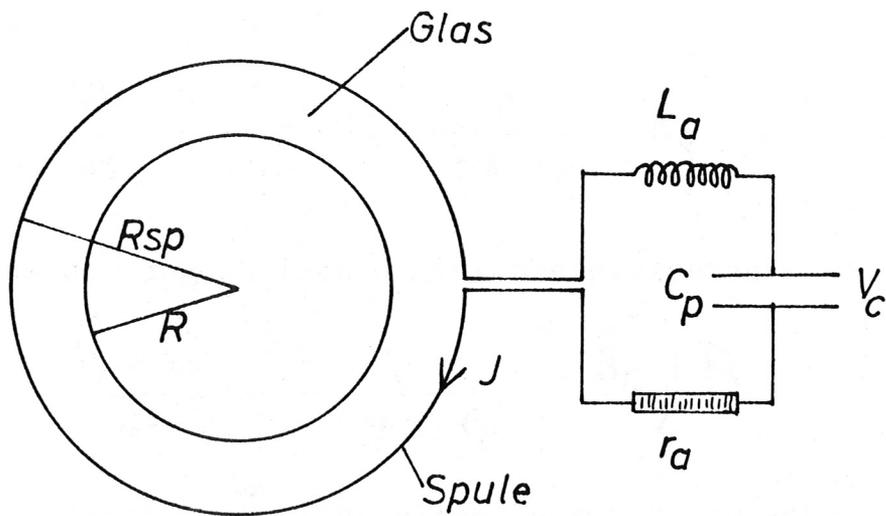
$$\hat{n}_{N+1/2} = (n_{N-1/2} - n_{\text{Min}}) \cdot e^{-\text{const} \cdot \Delta t} + n_{\text{Min}} .$$

Bei entgegengerichteter Bewegung lassen sich die Randwerte aus den Kontinuitätsgleichungen ermitteln. Eine genauere Diskussion dieser Randbedingungen findet man in [21] .

Bei der folgenden Berechnung von  $B_{\text{Rand}}$  ( $= B_{N+1/2} = B_R$ ) werden elektrostatische Einheiten verwendet.

Das Induktionsgesetz liefert

$$- \frac{2\pi}{c} \left( \int_0^R \dot{B} r dr + \int_R^{R_{sp}} \dot{B} r dr \right) = -V_c + J \cdot r_a + \frac{L_a}{c^2} \cdot \dot{j} ;$$



Skizze 7

Die Skizze 7 erklärt die Bezeichnungen. Mit den weiteren Annahmen:

- 1.)  $\dot{B}$  hängt im Glas nicht von  $r$  ab;
- 2.) Es gilt  $B_R \cdot l = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot j$  (aus  $\text{rot } \vec{B} = \frac{4 \cdot \pi}{c} \vec{j}$ )

mit  $l$  als Spulenlänge;

- 3.) Am Rand gilt Gleichung (23);

folgt eine Formel, wie sie - in etwas anderer Schreibweise - schon in [24] verwendet wird:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{c} \pi (R_{sp}^2 - R^2) \cdot \dot{B}_R &= -V_c + \frac{c \cdot l}{4 \pi} \cdot r_a \cdot B_R + \frac{L_a}{c^2} \cdot \frac{c \cdot l}{4 \pi} \cdot \dot{B}_R + \\
 &+ 2 \pi \cdot R \cdot \eta_R \cdot \left( \frac{c}{4 \pi} \frac{\partial B}{\partial r} \right)_R - \frac{2 \pi R}{c} \cdot v_R \cdot B_R \quad (81)
 \end{aligned}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung für den Strom gewinnt man

$$\frac{\partial V_c}{\partial t} = - \frac{j}{c_p} = - \frac{c \cdot l}{4\pi \cdot c_p} \cdot B_R \cdot$$

Aus der zugehörigen Differenzengleichung

$$\frac{\hat{V}_c - V_c}{\Delta t} = - \frac{c \cdot l}{4\pi \cdot c_p} \cdot \frac{\hat{B}_R + B_R}{2}$$

läßt sich  $c \cdot \tilde{V}_c$  (für einen Zeitpunkt zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$ , wie in (81) erforderlich!) berechnen:

$$c \cdot \tilde{V}_c = c \cdot \frac{\hat{V}_c + V_c}{2} = - \frac{c^2 \cdot l \cdot \Delta t}{16\pi \cdot c_p} (\hat{B}_R + B_R) + c \cdot V_c \cdot$$

Der Term  $\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_R$  wird ersetzt durch

$$\frac{\hat{B}_{N+1/2} + B_{N+1/2} - \hat{B}_{N-1/2} - B_{N-1/2}}{2 \cdot \Delta_{N+1/2}}$$

Da die Hilfsgrößen  $E_{j+1/2}$  und  $F_{j+1/2}$  - wie in II b erwähnt - von der Achse nach außen berechnet werden, also  $E_{N-1/2}$  und  $F_{N-1/2}$  bekannt sind, kann man die zusätzliche Unbekannte  $\hat{B}_{N-1/2}$  eliminieren durch

$$\hat{B}_{N-1/2} = E_{N-1/2} \cdot \hat{B}_{N+1/2} + F_{N-1/2} \cdot$$

Kürzt man ab

$$A = \pi \cdot (R_{sp}^2 - R^2) + \frac{L_a}{4\pi} \cdot \ell ,$$

$$D = \frac{c^2}{4\pi} \cdot \ell \cdot \tau_a - 2\pi R \cdot v_{N+1/2} ,$$

$$\alpha = \frac{\pi \cdot R}{\Delta_{N+1/2}} \cdot \frac{c^2}{4\pi} \cdot \eta_{N+1/2} ,$$

$$\beta = \frac{c^2 \cdot \ell \cdot \Delta t}{16\pi \cdot c_p} ,$$

so folgt für  $\hat{B}_{N+1/2}$  aus (81)

$$\hat{B}_{N+1/2} \left[ \frac{A}{\Delta t} + \frac{D}{2} + \alpha (1 - E_{N-1/2}) + \beta \right] =$$

(82)

$$= B_{N+1/2} \cdot \left( \frac{A}{\Delta t} - \frac{D}{2} - \alpha - \beta \right) + \alpha (B_{N-1/2} + F_{N-1/2}) + C \cdot V_c .$$

#### IV) Bewegliches Koordinatennetz

Es hat sich als günstig erwiesen, die (räumlichen) Koordinatenpunkte dort dichter zu wählen, wo steile Gradienten auftreten, jedoch die Gesamtzahl der Koordinatenpunkte konstant zu halten. Diese Methode ist in [21] angegeben und diskutiert.

Das Fortran-programm für die Berechnung des jeweils neuen Koordinatennetzes und die Interpolation aller Ortsfunktionen auf dieses wurde mit geringen Änderungen von Dr. K. Hain (I.P.P. München-Garching) übernommen.

V) Beschränkungen für den Zeitschritt

Die richtige Wahl des Zeitschrittes  $\Delta t$  ist für die numerische Stabilität von entscheidender Bedeutung. Richtungsweisende Stabilitätsbetrachtungen für hydrodynamische Gleichungssysteme sind in [25] gemacht. Sie führen für den vorliegenden Fall auf die Ungleichung:

$$\Delta t \leq \text{Min}_{(j)} \frac{\Delta_{j+1/2}}{|v_{j+1/2}| + |v_{0j+1/2}| + \sqrt{\frac{5}{3}(\tau_{e_{j+1/2}} + \tau_{i_{j+1/2}} + \tau_{o_{j+1/2}}) + \frac{B_{j+1/2}^2}{\eta_{j+1/2}}}}$$

Im Verlauf der Rechnungen zeigte es sich, daß zusätzlich die Bedingung

$$\Delta t \leq \text{Min}_{(j)} \frac{1}{|\text{div } v_{j+1/2}|} = \text{Min}_{(j)} \frac{\tau_{j+1/2} \cdot \Delta_{j+1/2}}{|\tau_{j+1} v_{j+1} - \tau_j v_j|}$$

erfüllt sein mußte.

Bei sehr hohen Stromdichten blieb das System dann stabil, wenn

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta_{j+1/2})^2}{2 \cdot \eta_{j+1/2}} .$$

## VI) Lösungsfolge für das gesamte Gleichungssystem

Wegen der Kopplungsterme ist es nicht möglich, die Gleichungen (70) bis (73), (76) bis (78) in irgendeiner Reihenfolge einzeln zu lösen. Dazu müßten mehrere Funktionen zugleich für die neue Zeit  $t + \Delta t$  bekannt sein.

Es wird daher der folgende Weg eingeschlagen: Alle Koeffizienten werden berechnet mit Argumenten ( $T_i, T_e, n$  usw.), die für die Zeit  $t$  gelten. Der Fehler, der dabei gemacht wird, dürfte gering sein, da die Zeitschritte sehr klein sind ( $10^{-4} - 10^{-3} \mu\text{sec}$ ).

Daraus ergeben sich aus den Größen zur Zeit  $t$  die Geschwindigkeiten für den Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , und zwar zuerst die größere Plasmageschwindigkeit, dann die kleinere Neutralgasgeschwindigkeit, wobei in (73)  $\tilde{u}_{oj}$  durch  $u_{oj}$  ersetzt werden muß.

In der Gleichung für das Magnetfeld kommen nur die neuen Geschwindigkeiten vor, so daß diese ohne weitere Vernachlässigung gelöst wird.

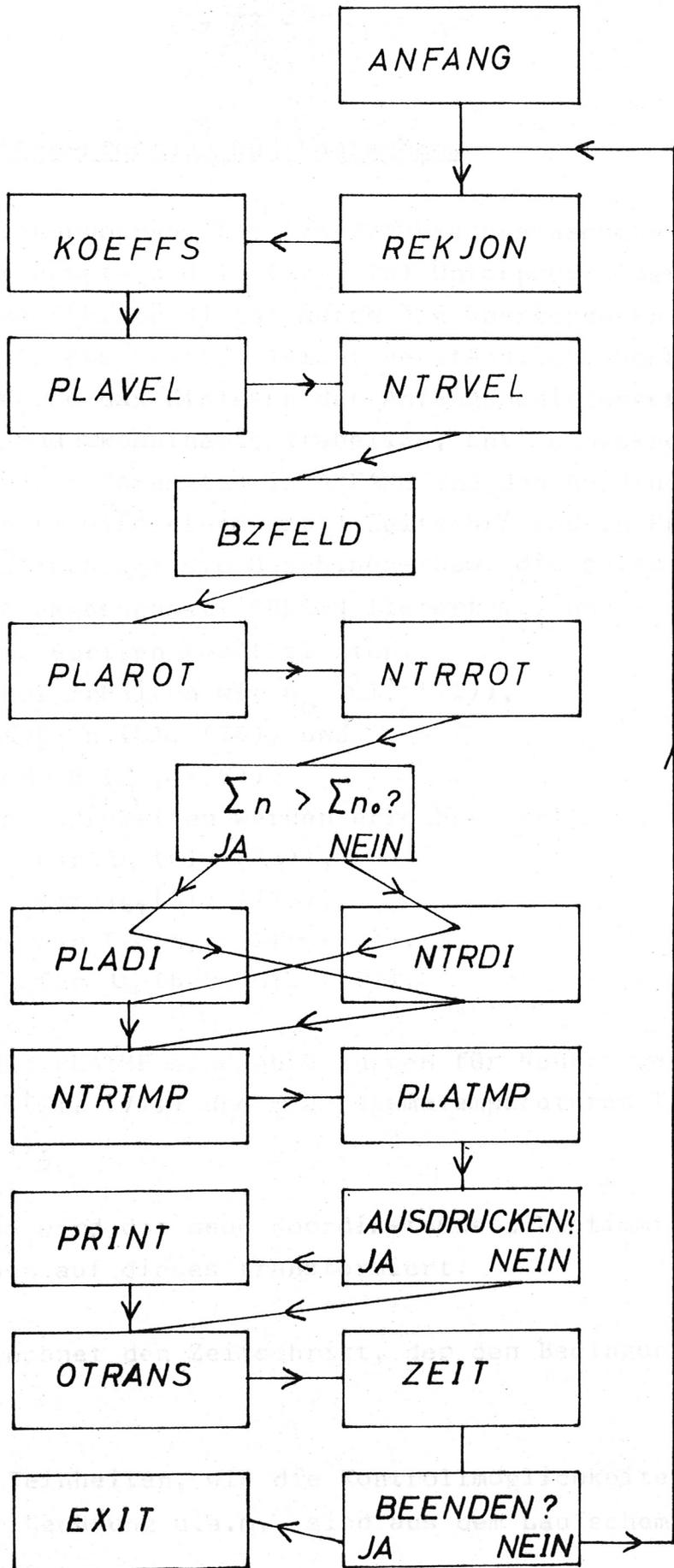
Je nachdem, ob

$$\sum_j n > \sum_j n_o \quad \text{oder} \quad \sum_j n_o > \sum_j n ,$$

wird zuerst  $n$  oder  $n_o$  berechnet; die zweite Dichte in der Reihenfolge kann dann stets mit den neuen Werten der ersten bestimmt werden.

Mit "alten"  $T_i$  und  $T_e$  gewinnt man nun aus (77)  $\hat{T}_o$ , und damit schließlich  $\hat{T}_i$  und  $\hat{T}_e$ .

# LAUFSHEMA



## VII) Fortran-programm und Laufschem

Das Fortran-programm für IBM-7090-Rechenmaschine besteht aus einem Haupt- und 13 (bzw. 15) Unterprogrammen. Das Laufschem (Skizze 8) ist durch die Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes leicht verständlich. Noch nicht erwähnt wurde das Einlesen der Anfangsbedingungen, Ionisations- und Rekombinationstabellen, Entladungskreisdaten und sonstiger Parameter in ANFANG und das Ausdrucken jedes m-ten (m wird eingelesen) Zeitschrittes in PRINT. Hier wird auch auf die Maschinen- bzw. die geläufigen Einheiten umgerechnet. REKION liefert  $Q_{21}$  und  $S_{12}$ , KOEFFS die übrigen Koeffizienten.

Durch NTRDI erhalten wir  $n_0$  (Gl. (71)),  
durch PLADI  $n$  (Gl. (70)) und  
aus BZFELD  $B$  (Gl. (76)).

Die Geschwindigkeiten werden errechnet in:

PLAVEL für  $U_r$  (Gl. (73)),  
NTRVEL für  $U_{or}$  (Gl. (72)),  
NTRROT für  $U_{o\varphi}$  (nach Gl. (63)),  
PLAROT für  $U_{\varphi}$  (nach Gl. (65)).

NTRTMP und PLATMP sind Abkürzungen für Neutralgastemperatur  $T_0$  (Gl. (77)) und die Plasmatemperaturen  $T_i$  und  $T_e$  (Gl. (78)).

In OTRANS wird das neue Koordinatennetz bestimmt und alle Funktionen auf dieses transformiert.

ZEIT berechnet den Zeitschritt, der den Bedingungen aus V genügt.

Weitere Feinheiten, wie die Kontrollmöglichkeiten während der Rechnung u.a.m., sind aus dem Laufschem weggelassen.

#### D) Ergebnisse

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen einen Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Magnetfeldern als Funktionen der Zeit in verschiedenen Abständen von der Achse. Jeweils vier (zu verschiedenen Radien gehörige) Sondenkurven stammen von einer Entladung. Es sind in jedem Diagramm zwei experimentelle Kurven aus verschiedenen Entladungen eingezeichnet, damit man den Grad der Reproduzierbarkeit abschätzen kann. Die theoretischen Werte wurden mit einem über den Querschnitt des Rohres homogenen Anfangsionisierungsgrad von 10 % berechnet. Aus den Messungen kann man den Nullpunkt der Zeitskala nicht ermitteln; deshalb wurde jeweils für eine der vier zusammengehörigen Sondenkurven der für den Vergleich mit der entsprechenden theoretischen Kurve günstigste Nullpunkt festgelegt; für die restlichen drei lag dann die Skala fest.

Die Unterschiede zwischen Theorie und Experiment liegen innerhalb der (geschätzten) Fehlergrenzen. So ist z.B. zu beachten, daß man an der Grenze der Leistungsfähigkeit der Oszillographen arbeiten muß. Sehr schnelle ( $< 10^{-8}$  sec) zeitliche Änderungen werden wegen einer Anstiegszeit von  $10^{-8}$  sec verzerrt.

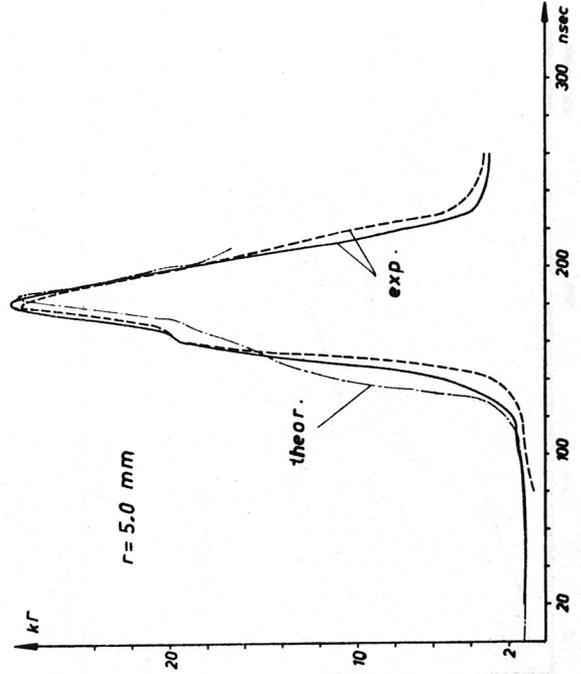
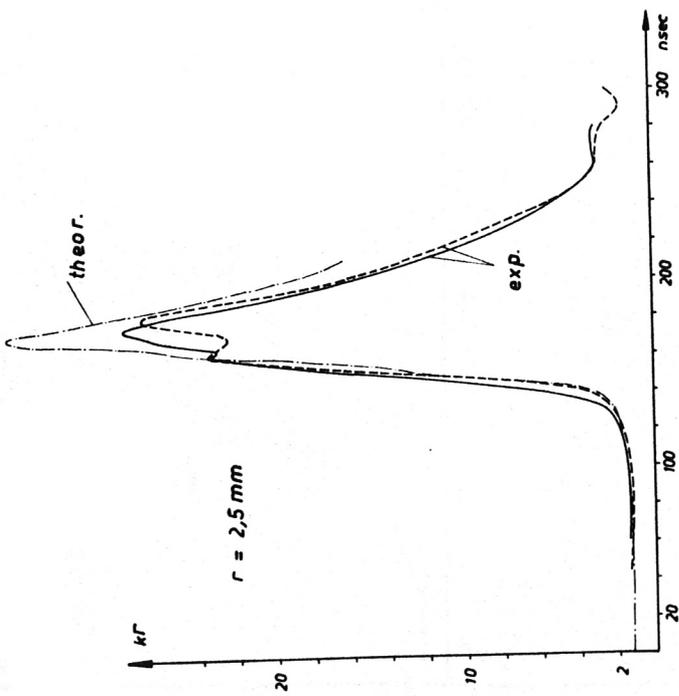
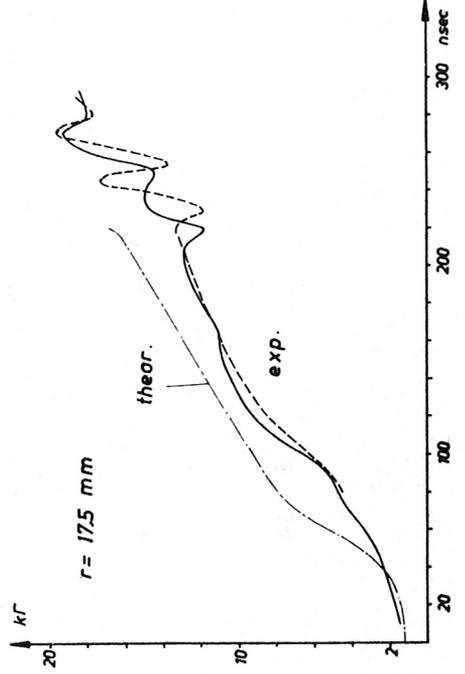
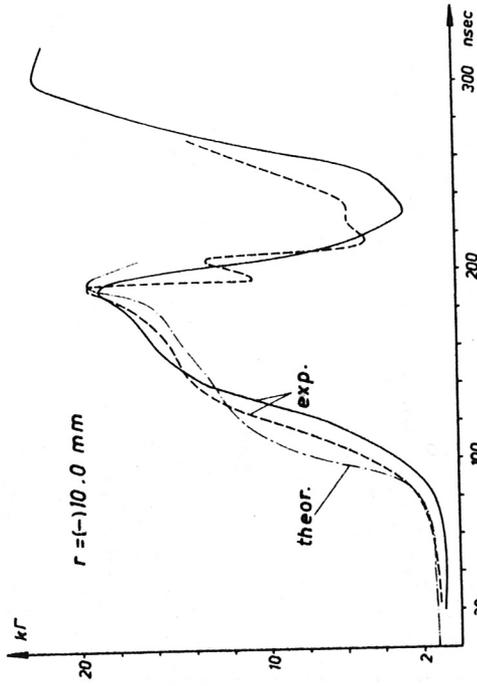
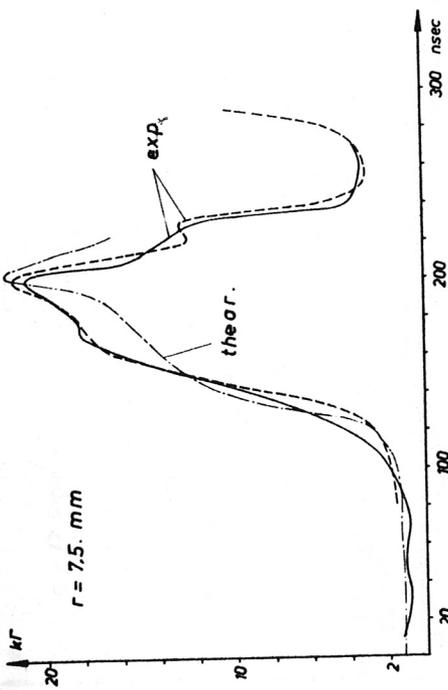


Abb. 7

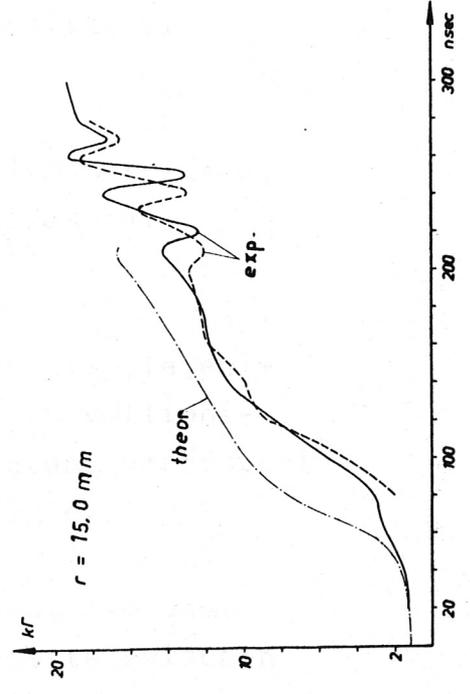
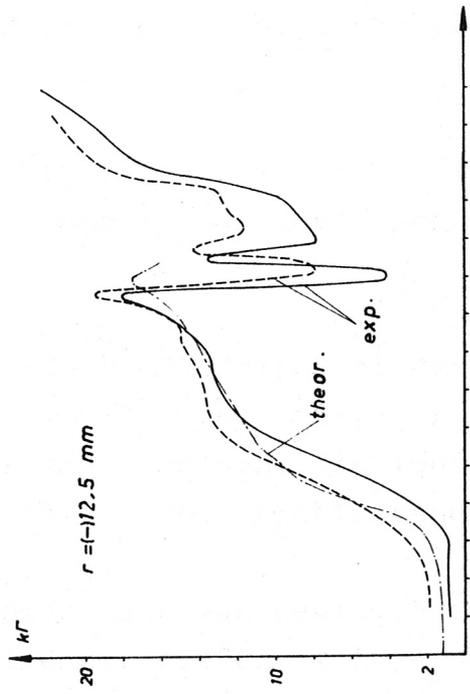
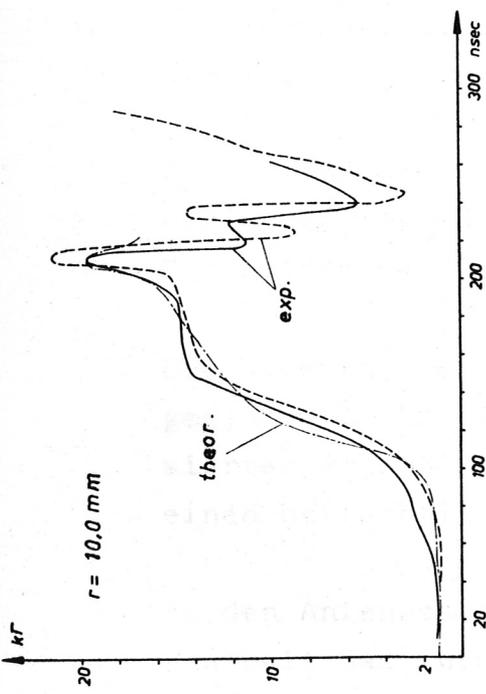
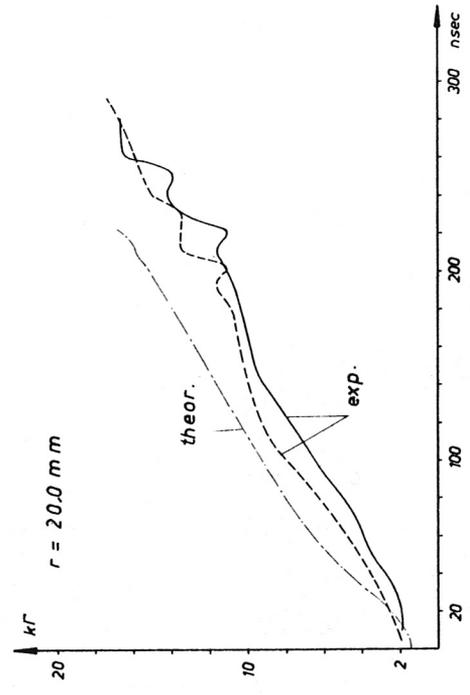
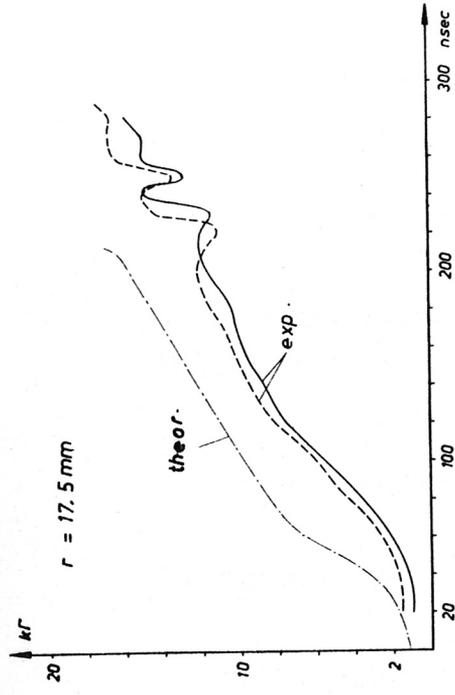


Abb. 8

In den nächsten drei Abbildungen 9 bis 11 sind die berechneten Funktionen für bestimmte Zeitpunkte über den Radius aufgetragen.

Es handelt sich um einen Fall mit folgenden homogenen (unabhängig von  $r$ ) Anfangsbedingungen.

Ionisierungsgrad	1 %
Magnetfeld	+ 1,2 k $\Gamma$ (parallel)
Plasma	$7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
Dichten:	
Neutralgas	$7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
Elektronen	1,5 eV
Temperaturen: Ionen	1,3 eV
Atome	1,2 eV
Geschwindigkeiten	0

Der Radius von 2,3 cm war durch 60 Punkte aufgeteilt. Die Rechnung blieb ohne die künstliche Viskosität  $QI$  stabil.

Der Beginn der Hauptentladung liegt beim Zeitpunkt  $T = 0$ , die erste maximale Kompression des Magnetfeldes bei  $T = 0,1956 \mu\text{sec}$ .

Die Temperaturen sind beträchtlich niedriger als diejenigen, die früher (s. [23] und [26]) für ein vollionisiertes Plasma berechnet wurden; die Ionisierung verbraucht einen beträchtlichen Teil der Elektronenenergie.

In den Anfangsstadien kann man deutlich sehen, daß das neutrale Gas infolge der großen Stoßquerschnitte zwischen Ionen und Atomen vom Plasma mitgerissen wird.

Das Plasma bildet stets einen Hohlzylinder; auch bei der maximalen Kompression, weil dann in der Achse ein hoher magnetischer Druck herrscht.

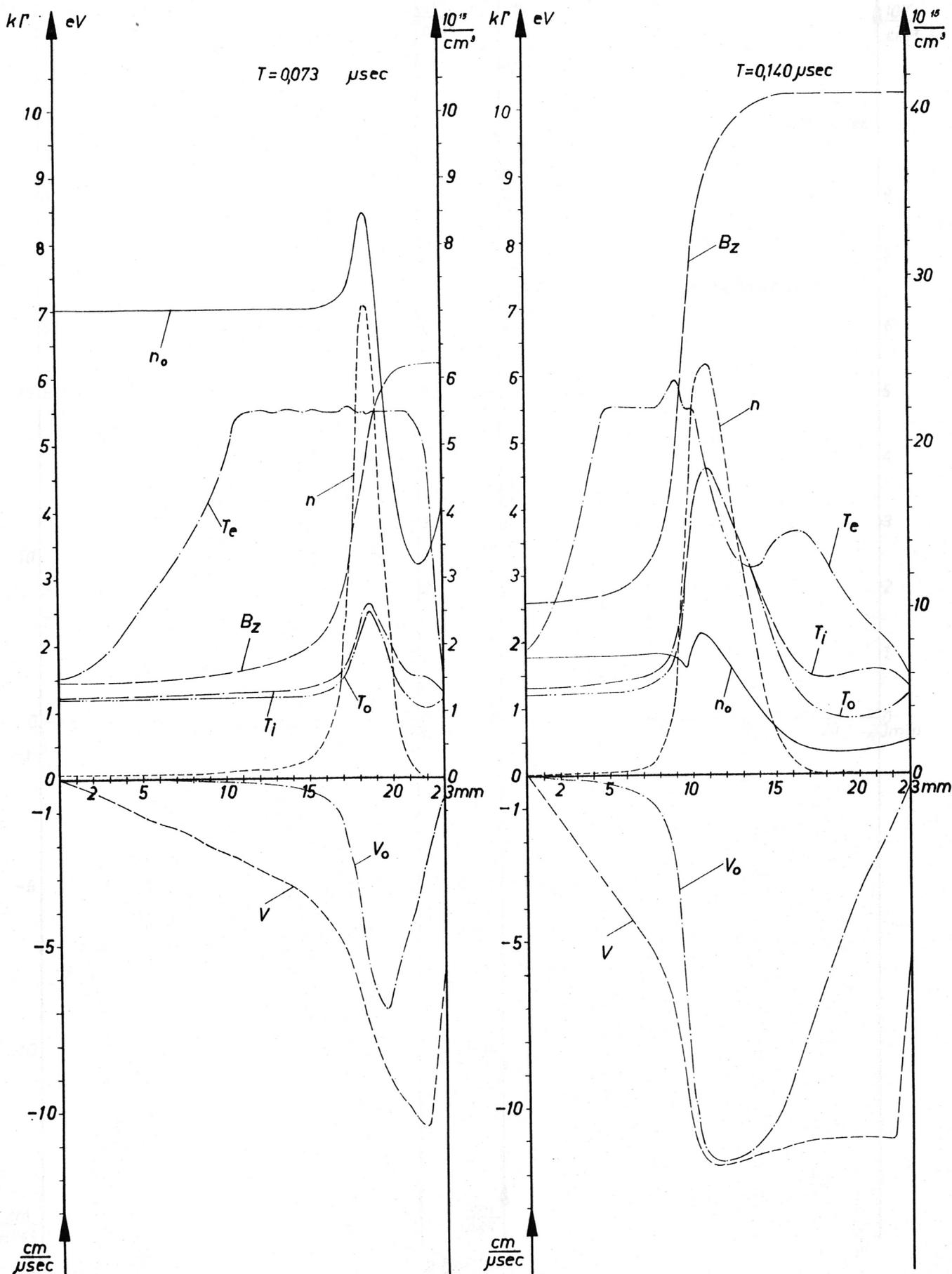


Abb. 9

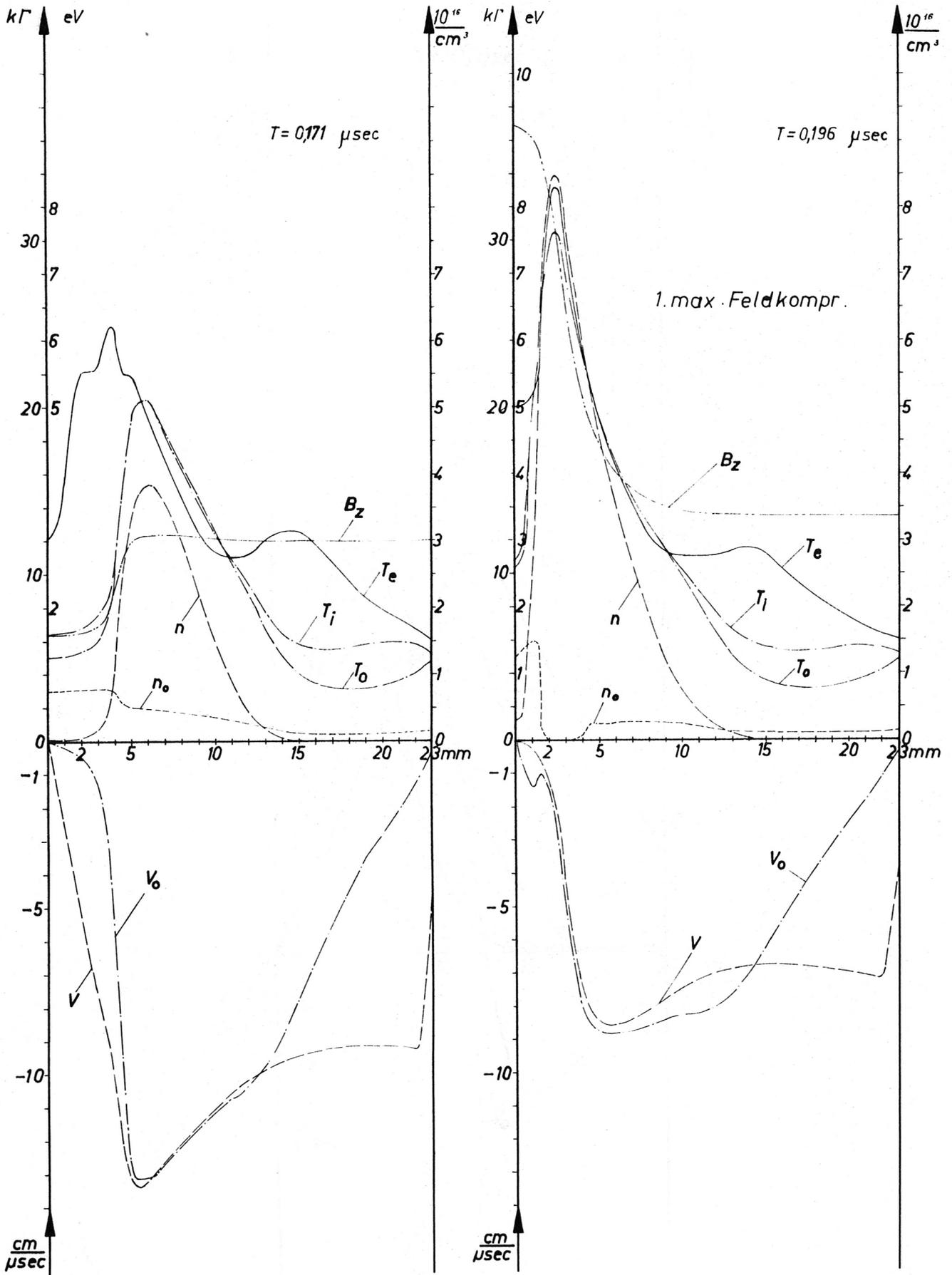


Abb. 10

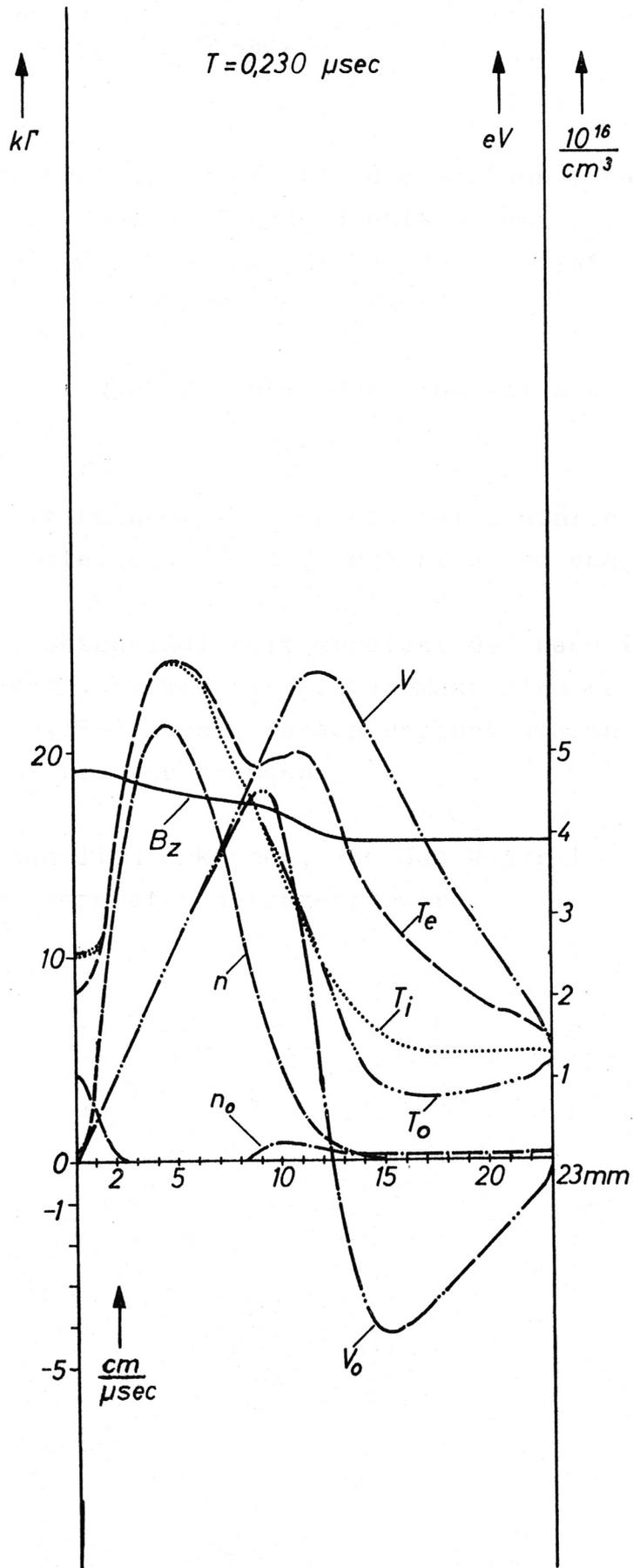


Abb. 11

In den Anfangsbedingungen für die Rechnung, nach der die Abbildungen 12 und 13 entstanden, ist gegenüber dem vorhergehenden Fall nur der Ionisationsgrad auf 10 % erhöht worden.

Dadurch nimmt die Steilheit der Gradienten und die Höhe der Maxima zu.

Die maximale Feldkompression erscheint einige nsec später; das ansteigende Feld dringt nicht so schnell ein.

Die größte Geschwindigkeit erreicht das nach innen laufende Plasma kurz vor der ersten maximalen Feldkompression ( $T = 0,1893 \mu\text{sec}$ ), danach beginnt das in der Mitte ansteigende Feld zu bremsen.

Man kann deutlich erkennen, wie das Neutralgas in Gebieten hoher Temperatur aufgezehrt wird.

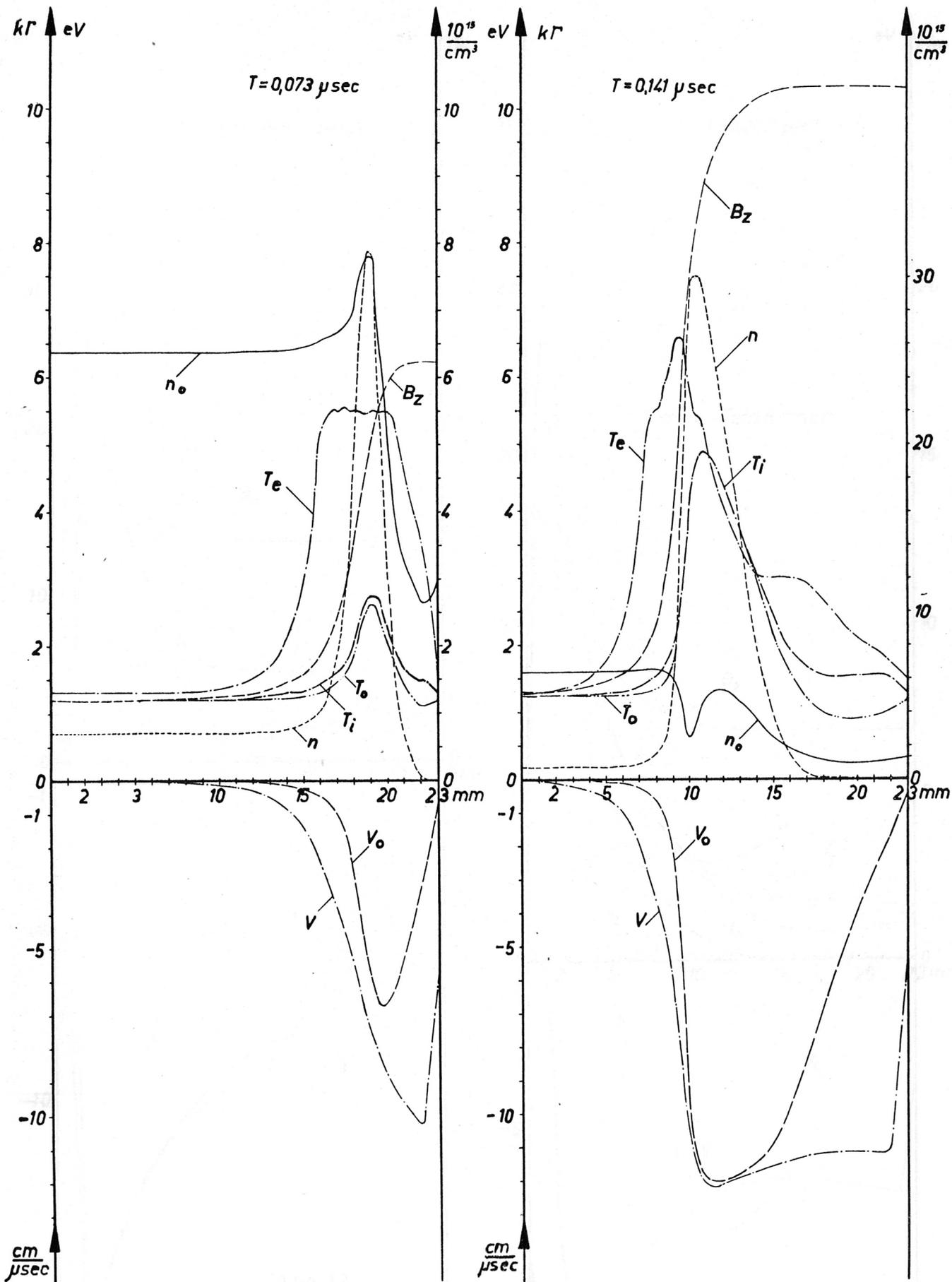


Abb. 12

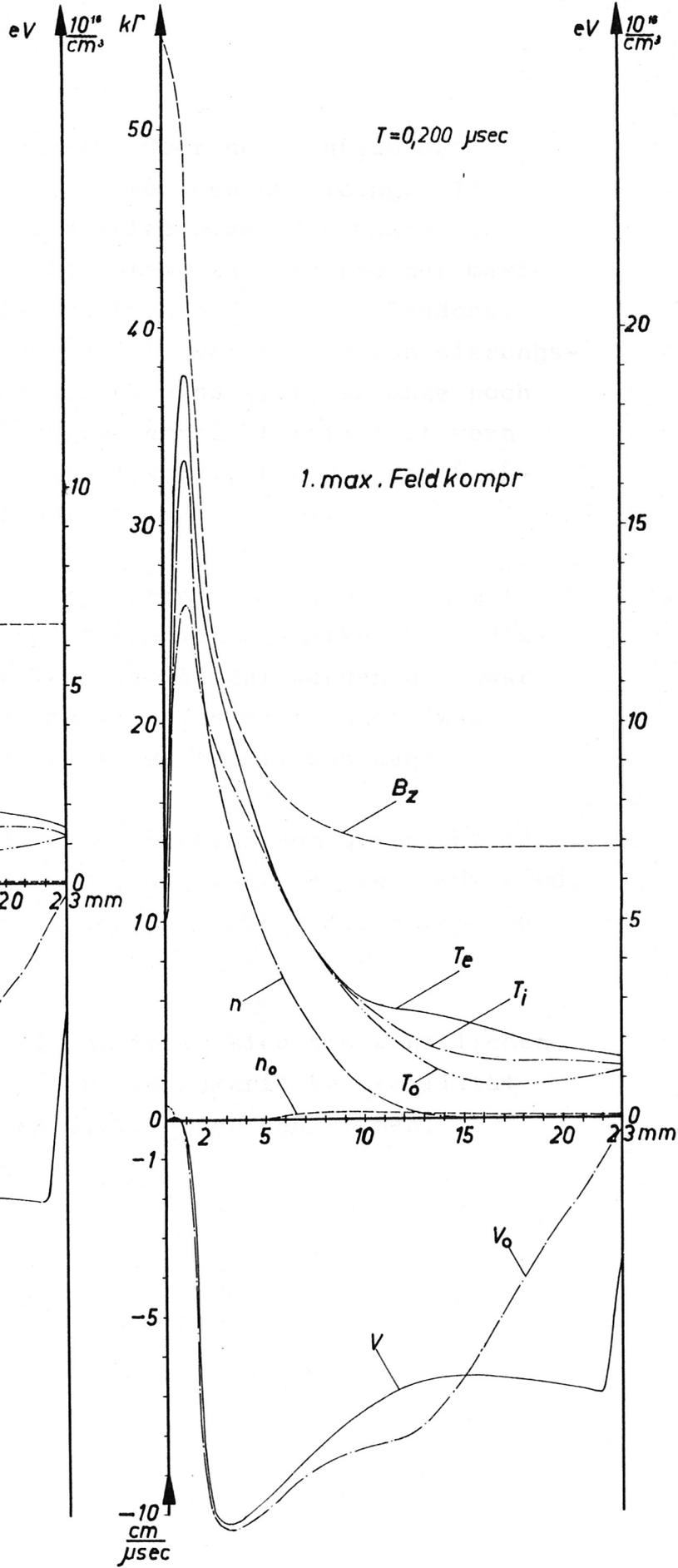
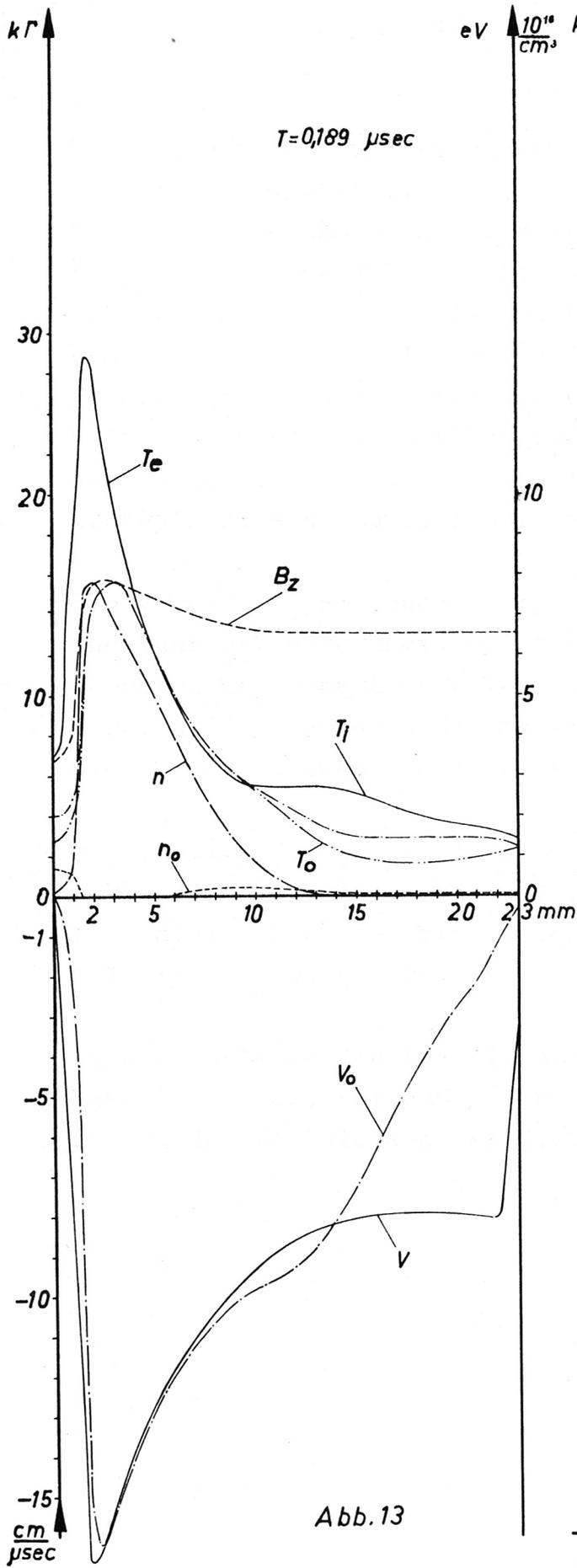


Abb. 13

Das Ergebnis der Untersuchungen über den Einfluß der künstlichen Viskosität  $Q_I$  ist aus den Abbildungen 14 bis 17 zu entnehmen. Es sind aufgetragen die maximalen (bzgl.  $r$ ) Elektronen- und Ionentemperaturen und der maximale Ionisierungsgrad als Funktionen der Zeit. Zunächst bemerkt man, daß, völlig unabhängig vom Anfangsionisierungsgrad,  $T_{e \text{ Max}}$  sich auf etwa 5,5 eV einstellt, solange noch kein sehr hoher Ionisationsgrad erreicht ist; erst wenn dieser in die Nähe des Wertes 1 kommt, beginnt die Elektronentemperatur zu steigen.

Ein Vergleich der Ionentemperaturen  $T_{i \text{ Max}}$ , die man mit und ohne  $Q_I$  errechnet, zeigt, in welchem starkem Maße diese durch den künstlichen Term verfälscht werden und zwar nicht nur in der Höhe des Maximums, sondern auch (was hier nicht zu sehen ist) in dessen räumlicher Lage.

Um darzulegen, daß der störende Einfluß von  $Q_I$  nicht maßgeblich von der Anwesenheit des Neutralgases bestimmt wird, sind alle Kurven für die beiden Anfangsionisierungen von 1 % und 10 % beigelegt.

In der vorliegenden Theorie erwiesen sich die künstlichen Terme als nicht notwendig für die numerische Stabilität und wurden deshalb aus den Gleichungen gestrichen.

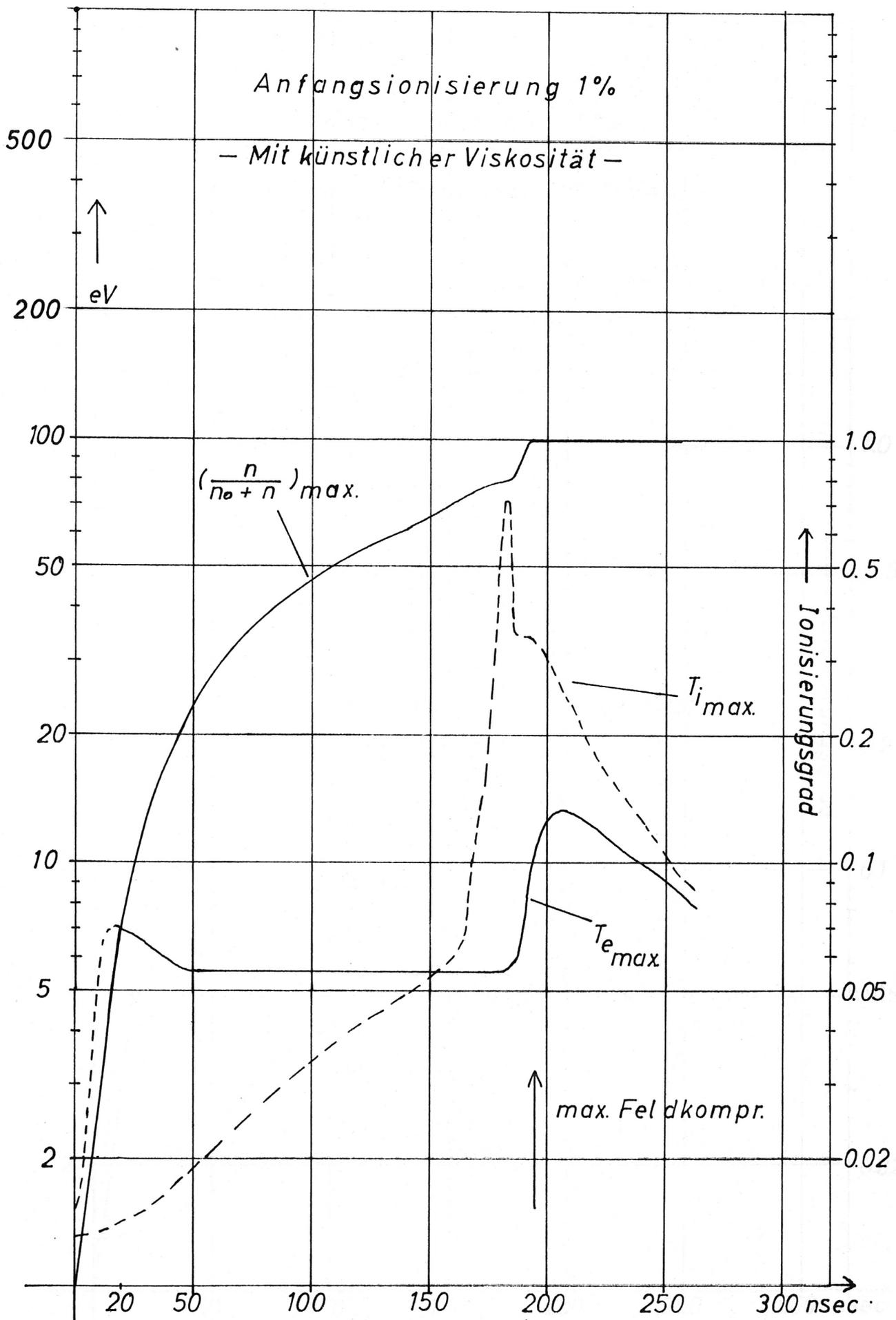


Abb. 14

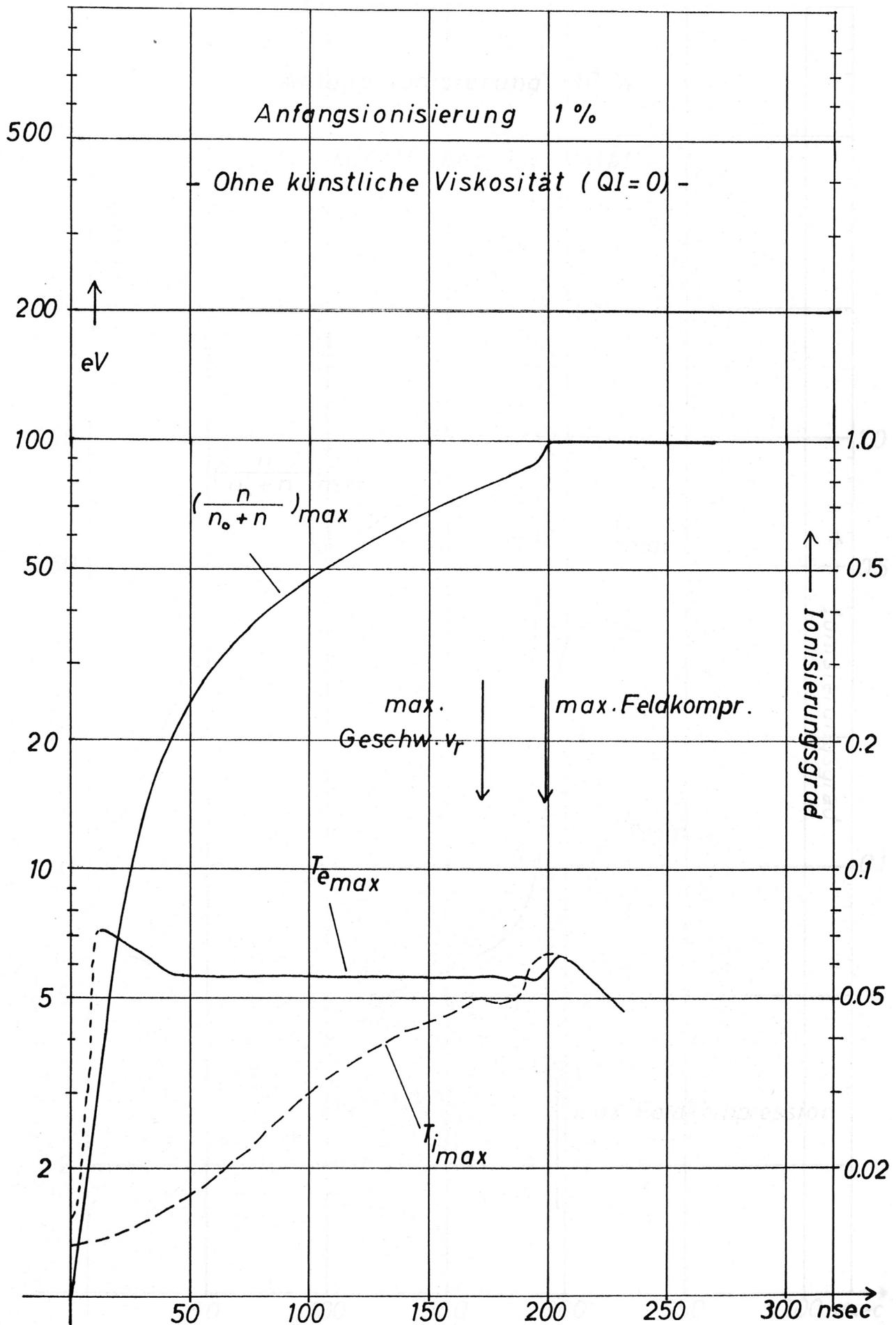


Abb.15

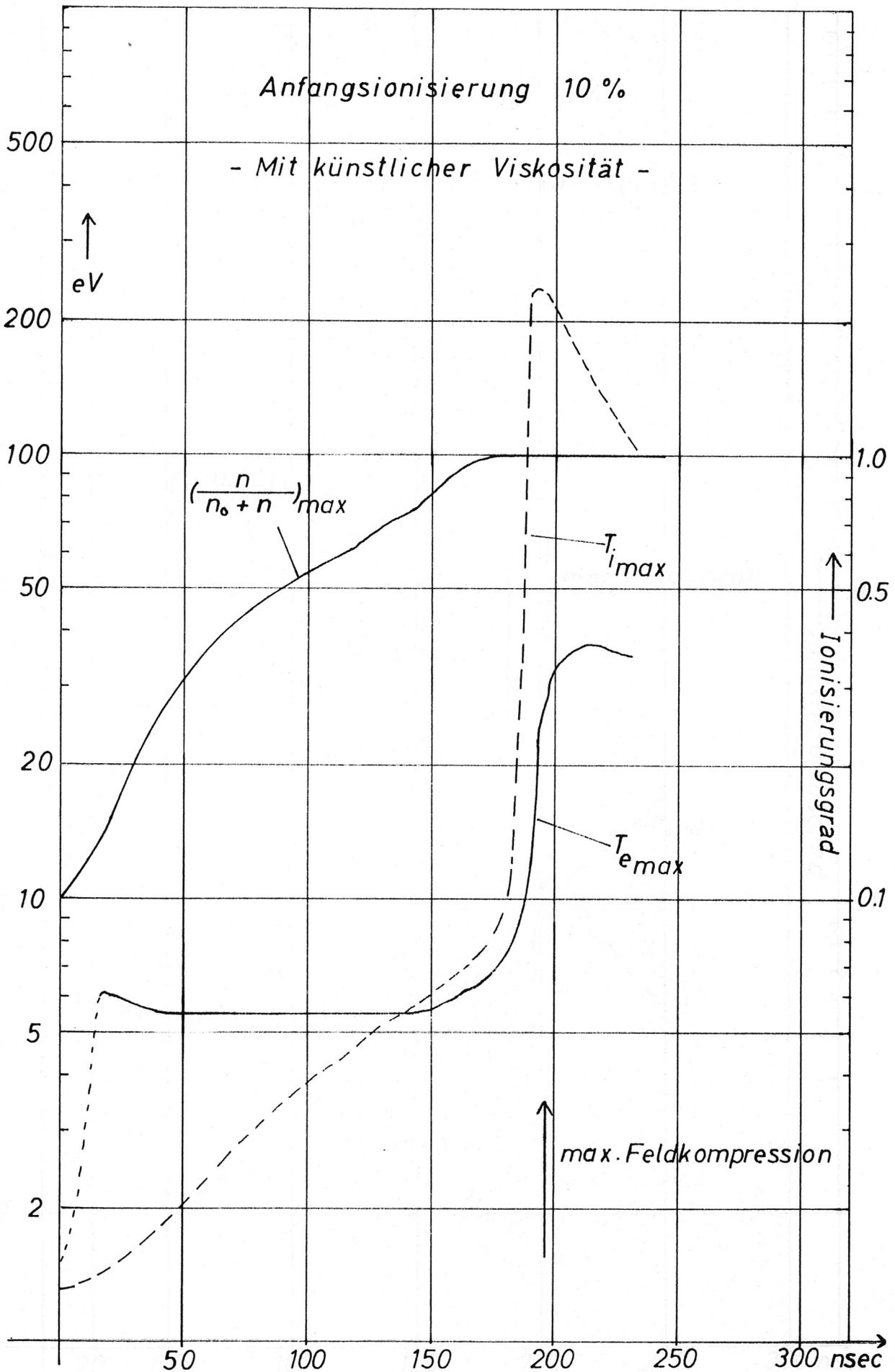


Abb. 16

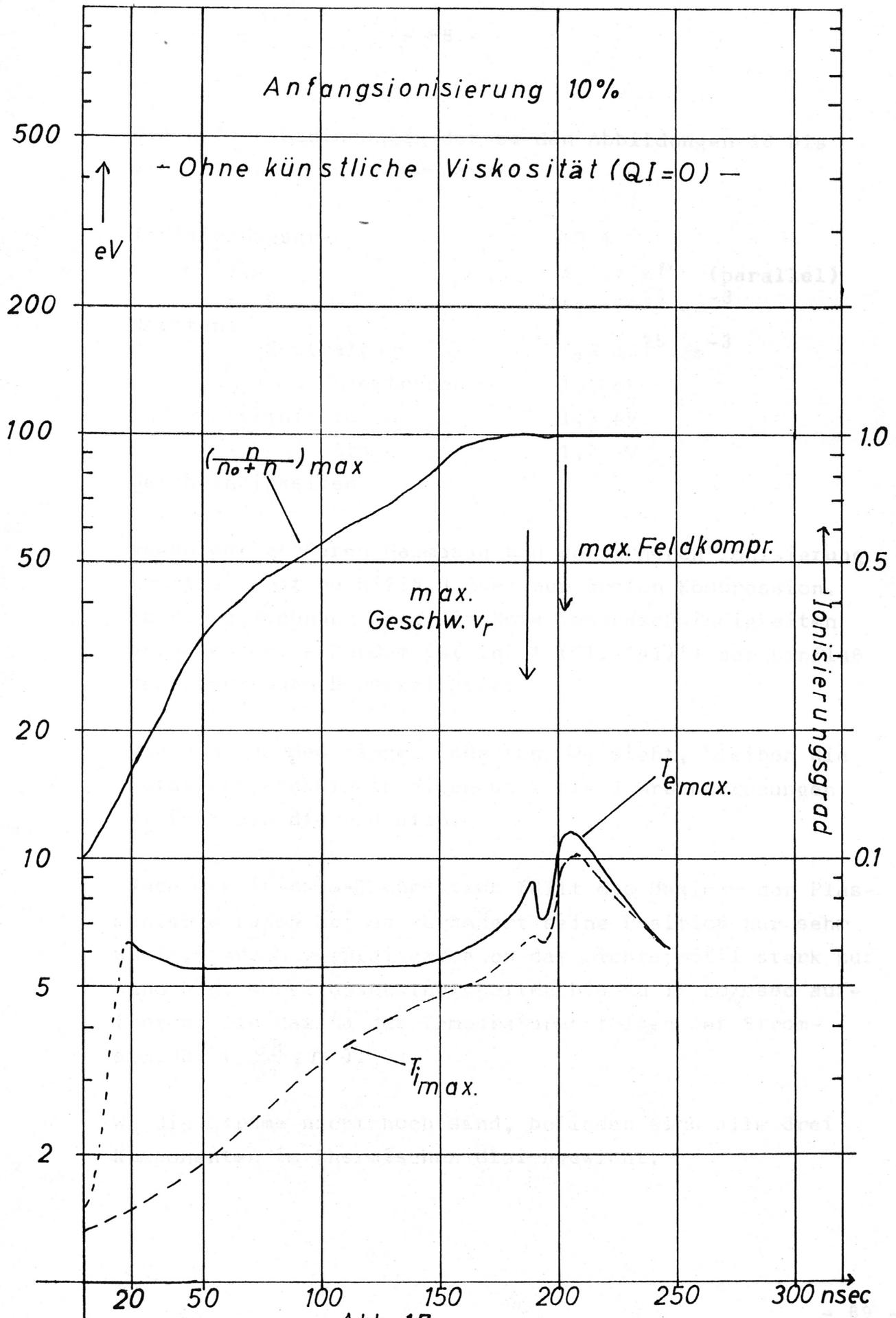


Abb. 17

Die Anfangsbedingungen der zu den Abbildungen 18 bis 21 gehörenden Rechnung waren:

Ionisierungsgrad	50 %
Magnetfeld	+ 1,2 k $\Gamma$ (parallel)
Plasma	$5,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
Dichten:	
Neutralgas	$5,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
Elektronen	1,5 eV
Temperaturen: Ionen	1,3 eV
Atome	1,2 eV
Geschwindigkeiten	0

Wegen der größeren Gasmasse und der höheren Ionisierung kommt es erst nach 235,9 nsec zur ersten Kompression. In diese Rechnung sind die Rotationsgeschwindigkeiten aufgenommen; außerdem ist in  $\gamma$  (Gl. (41)!) der Einfluß der Elektronen berücksichtigt.

Wie man aus dem eingezeichneten  $U_{\varphi}$  sieht, bleiben die Rotationsgeschwindigkeiten um 2 bis 3 Größenordnungen kleiner als die radialen.

Nach der (Plasma-)Kompression fällt das Maximum der Plasmadichte rasch ab; es verändert seine Position nur sehr wenig, jedoch verbreitert sich das Dichteprofil stark zur Wand hin, wobei Geschwindigkeiten bis zu 18 cm/ $\mu$ sec auftreten. Die Maxima der Temperaturen folgen der Stromschicht ( $\frac{\partial B}{\partial r} \neq 0$ ).

Wo die Ströme nicht hoch sind, befinden sich alle drei Komponenten im thermischen Gleichgewicht.

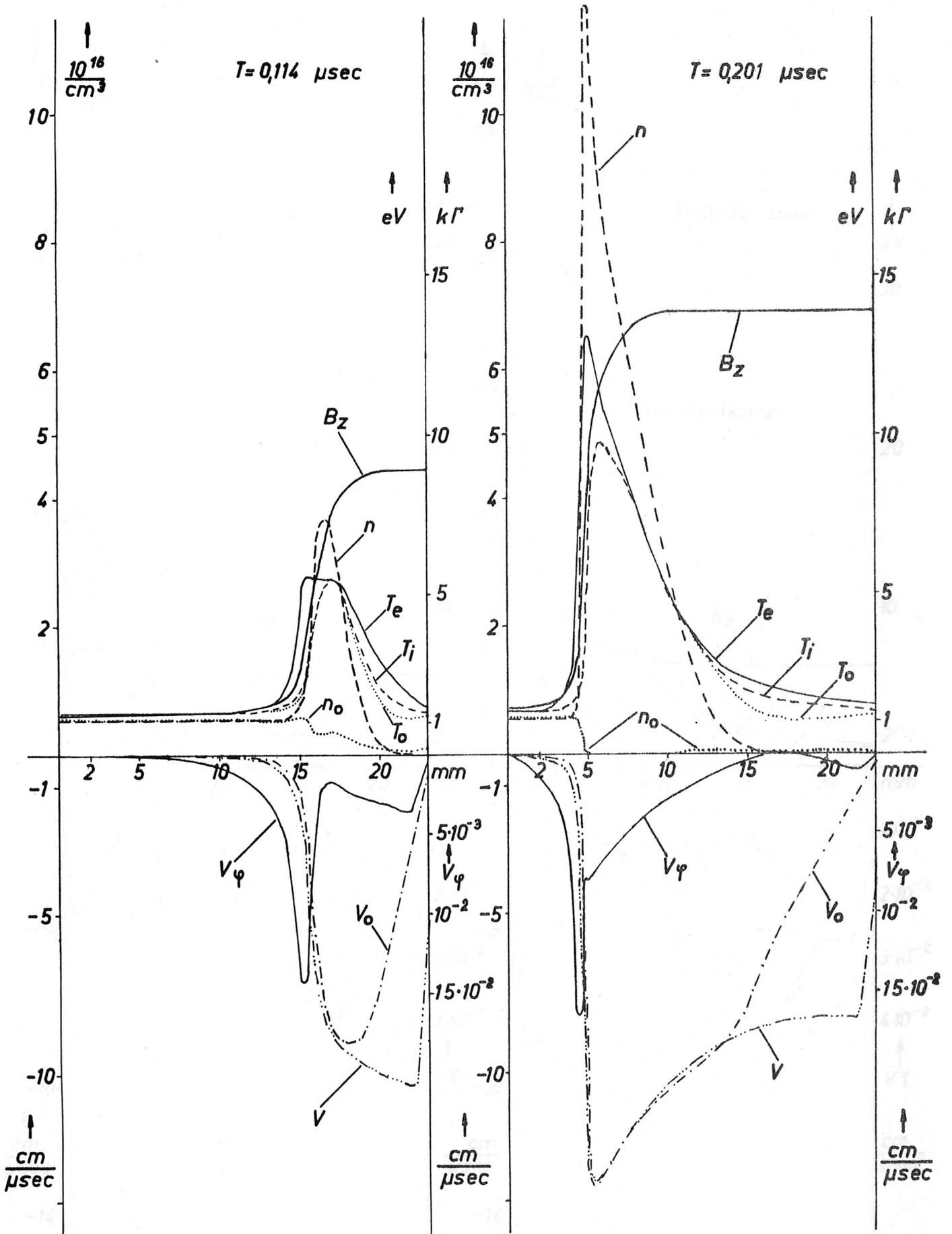


Abb.18

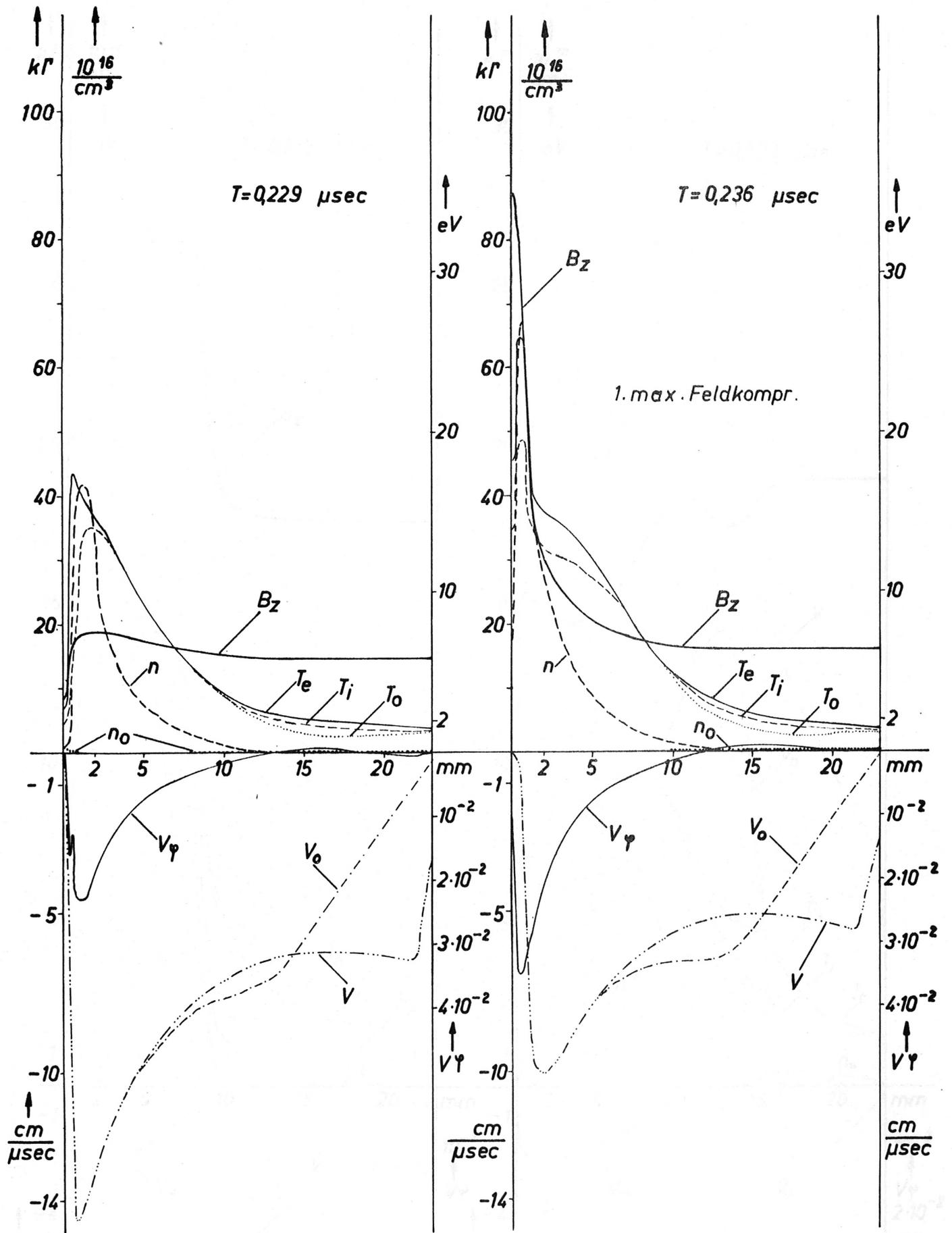


Abb. 19

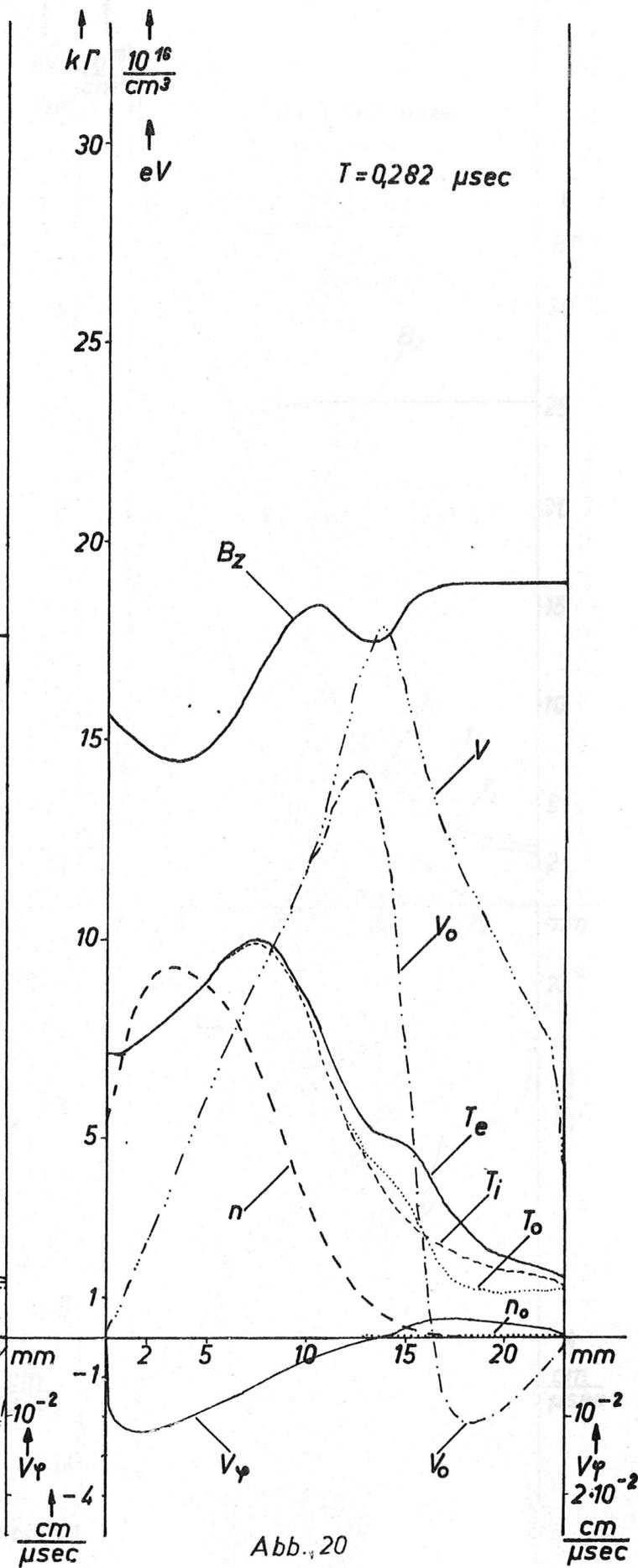
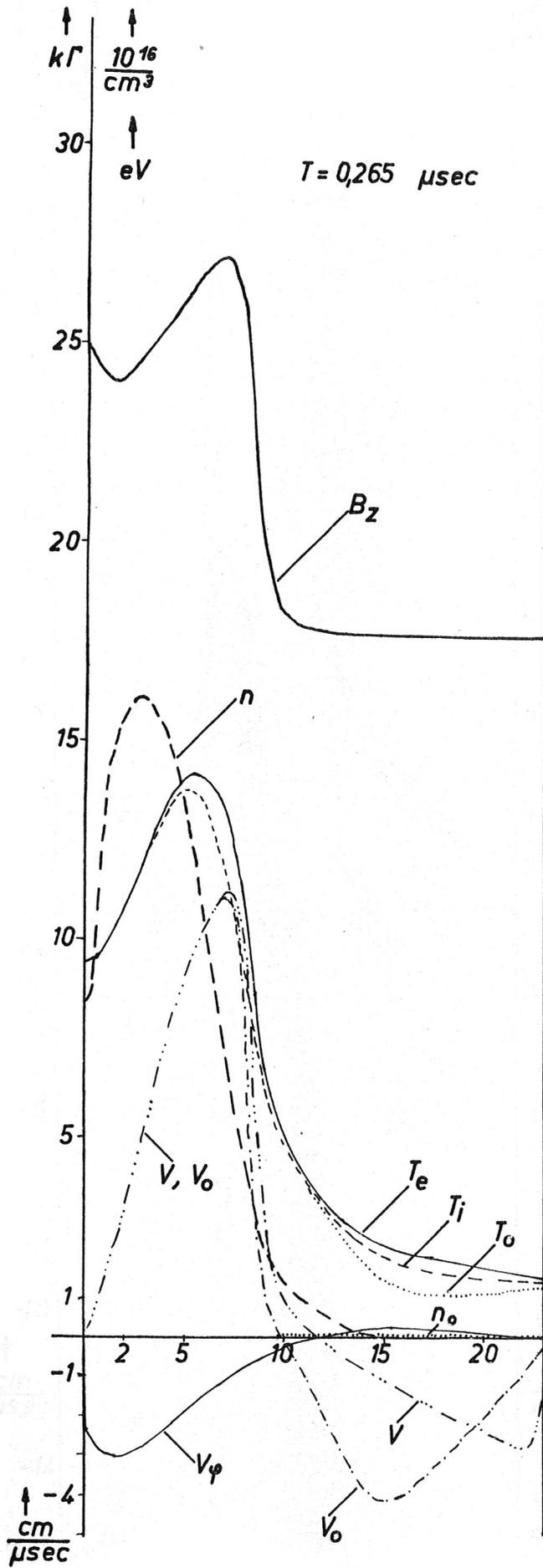


Abb. 20

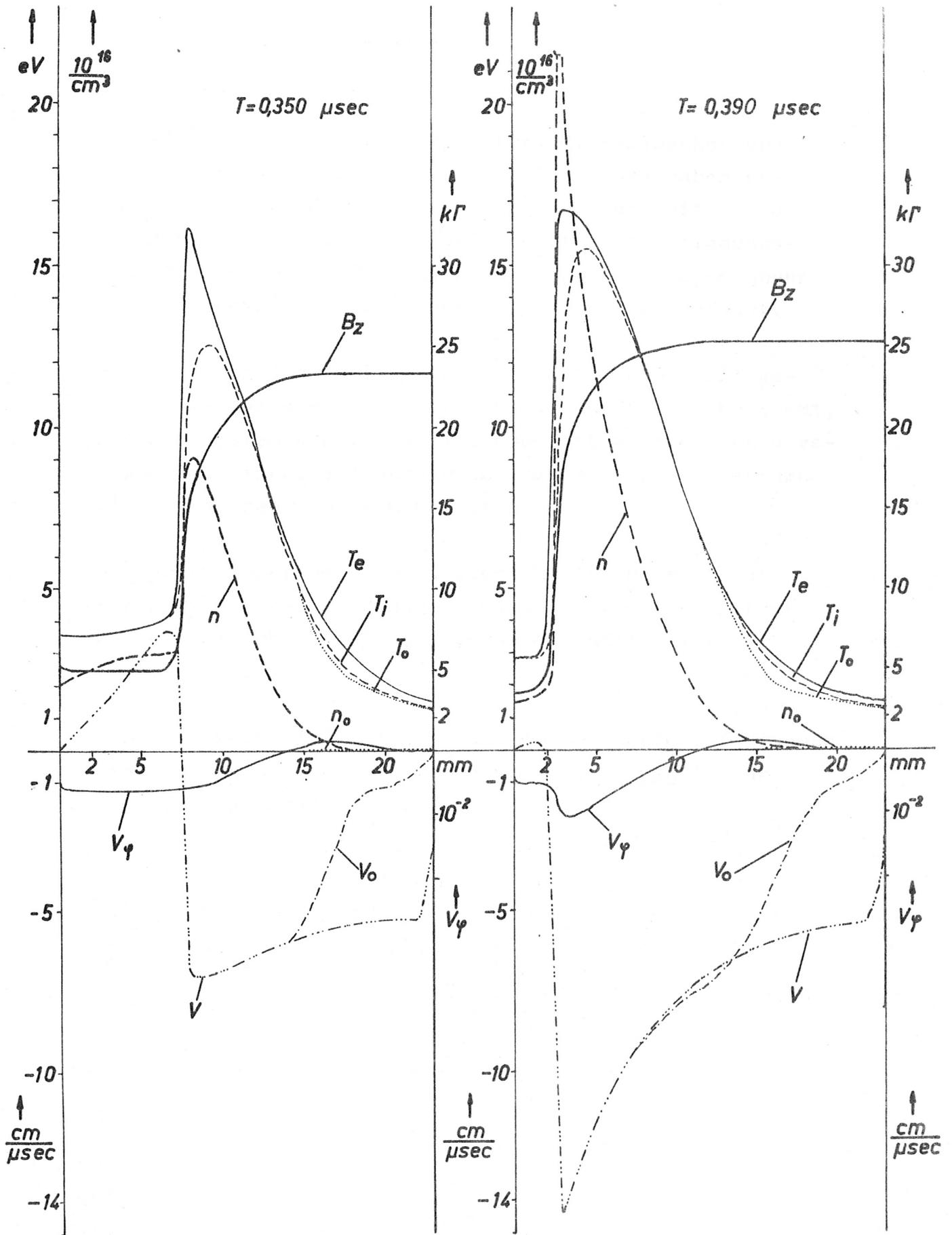


Abb. 21

Experimentelle Untersuchungen (Dr. M. Keilhacker und Dr. A. Eberhagen, I.P.P. München-Garching) haben ergeben, daß von der Vorionisierung her zur Zeit  $T = 0$  die Anfangswerte über dem Querschnitt des Entladungsröhres nicht homogen sind; deshalb wurde eine Rechnung mit Anfangswertprofilen (Abb. 11 - 26) durchgeführt.

Da die Geschwindigkeiten für die Zeit  $T = 0$  nicht gemessen werden konnten, wurde das Magnetfeld so bestimmt, daß das System nahezu im Gleichgewicht war; das Anfangsmagnetfeld (Abb. 22) entspricht deshalb in der Wandnähe nicht mehr den gemessenen Werten.

Integriert über den ganzen Querschnitt, beträgt der anfängliche Ionisierungsgrad etwa 67 %, der Fülldruck war der gleiche wie in dem vorhergehenden Fall (Abb. 18 - 21).

Die auftretenden Gradienten und Maximalwerte entsprächen einer Rechnung mit viel geringerem homogenen Anfangsionisierungsgrad.

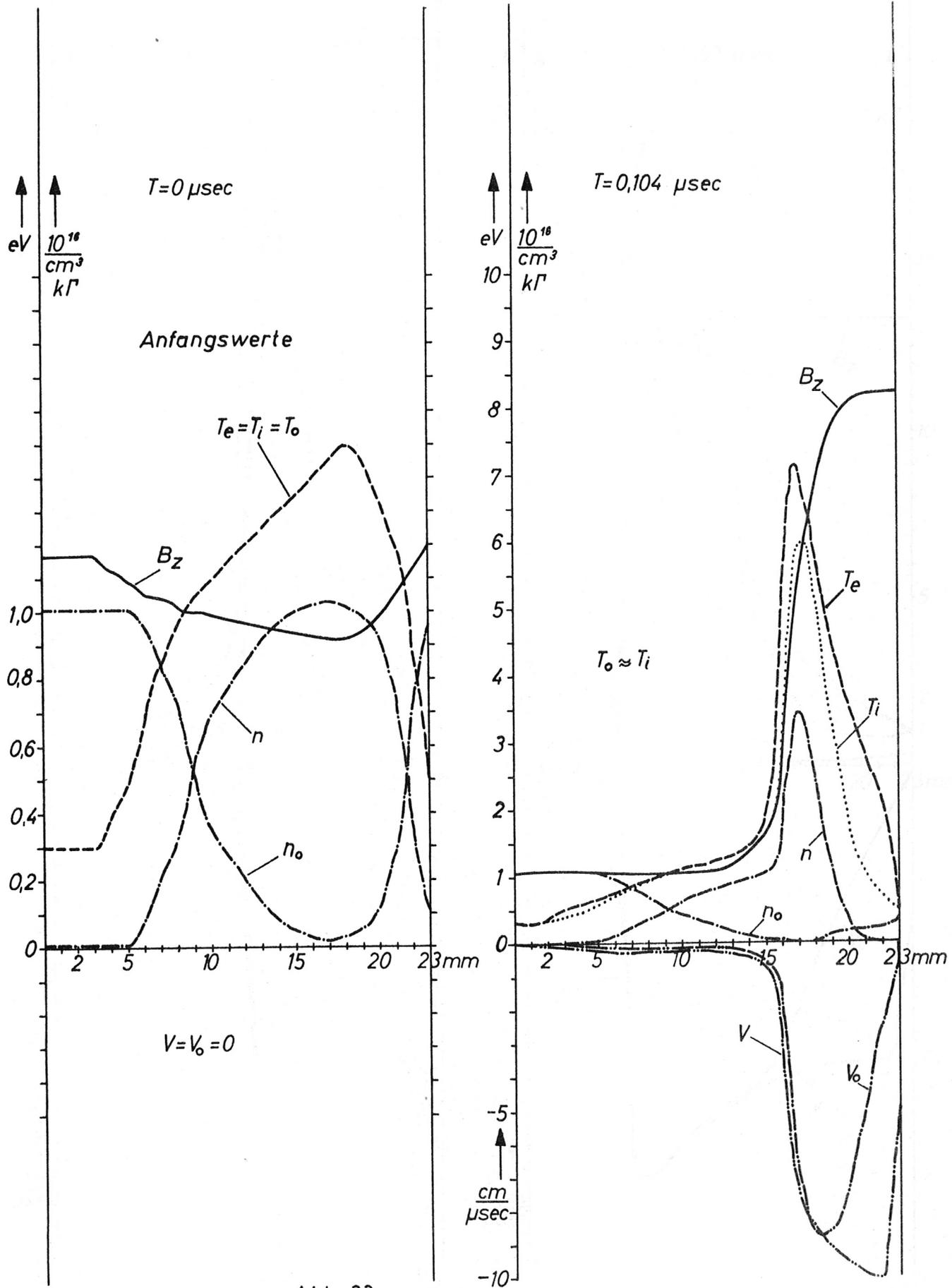


Abb. 22

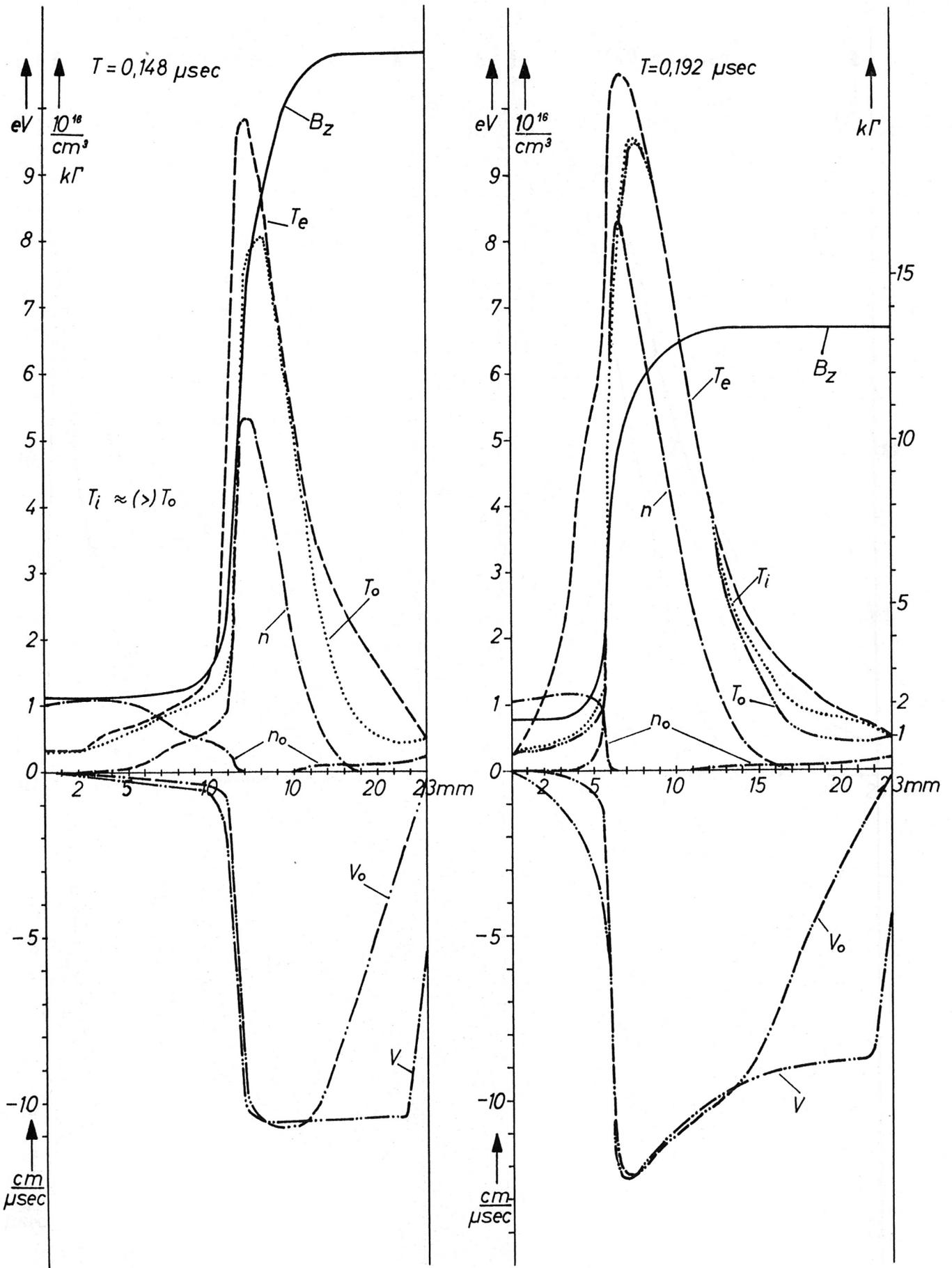


Abb. 23

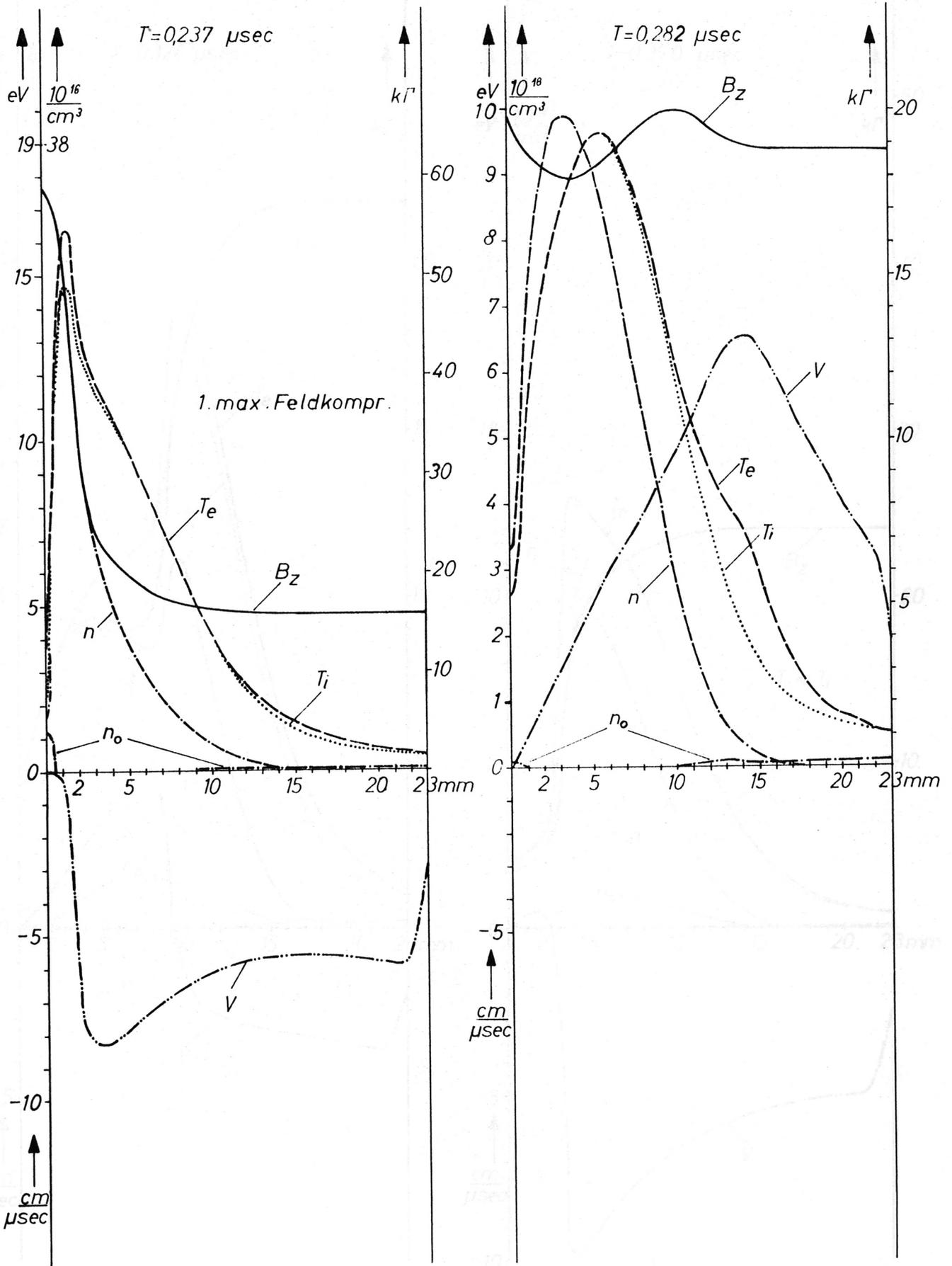


Abb. 24

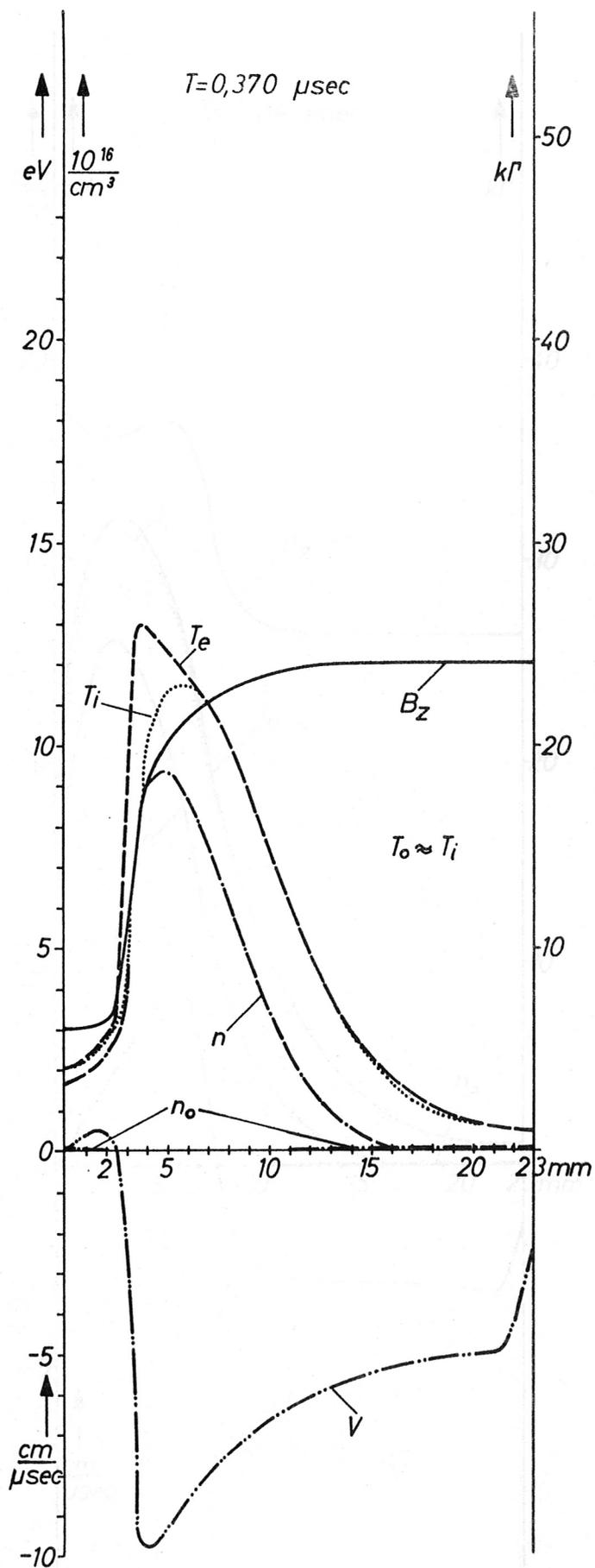
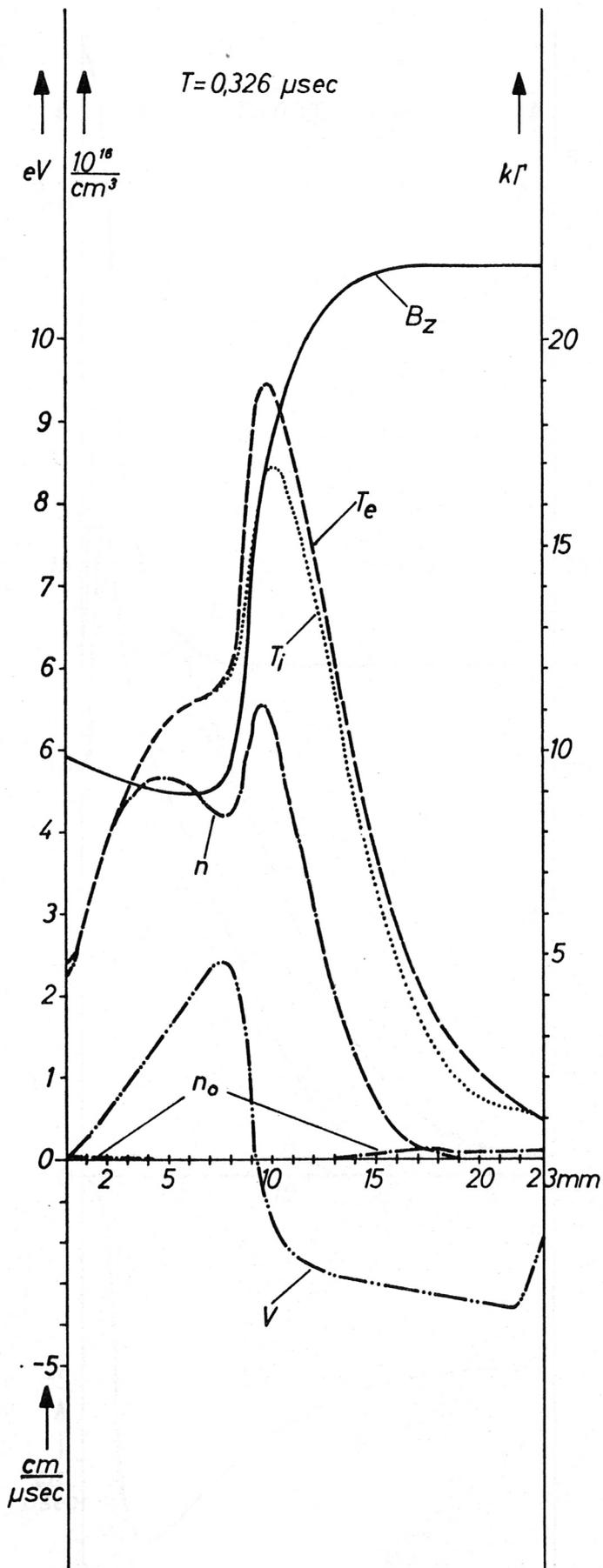


Abb. 25

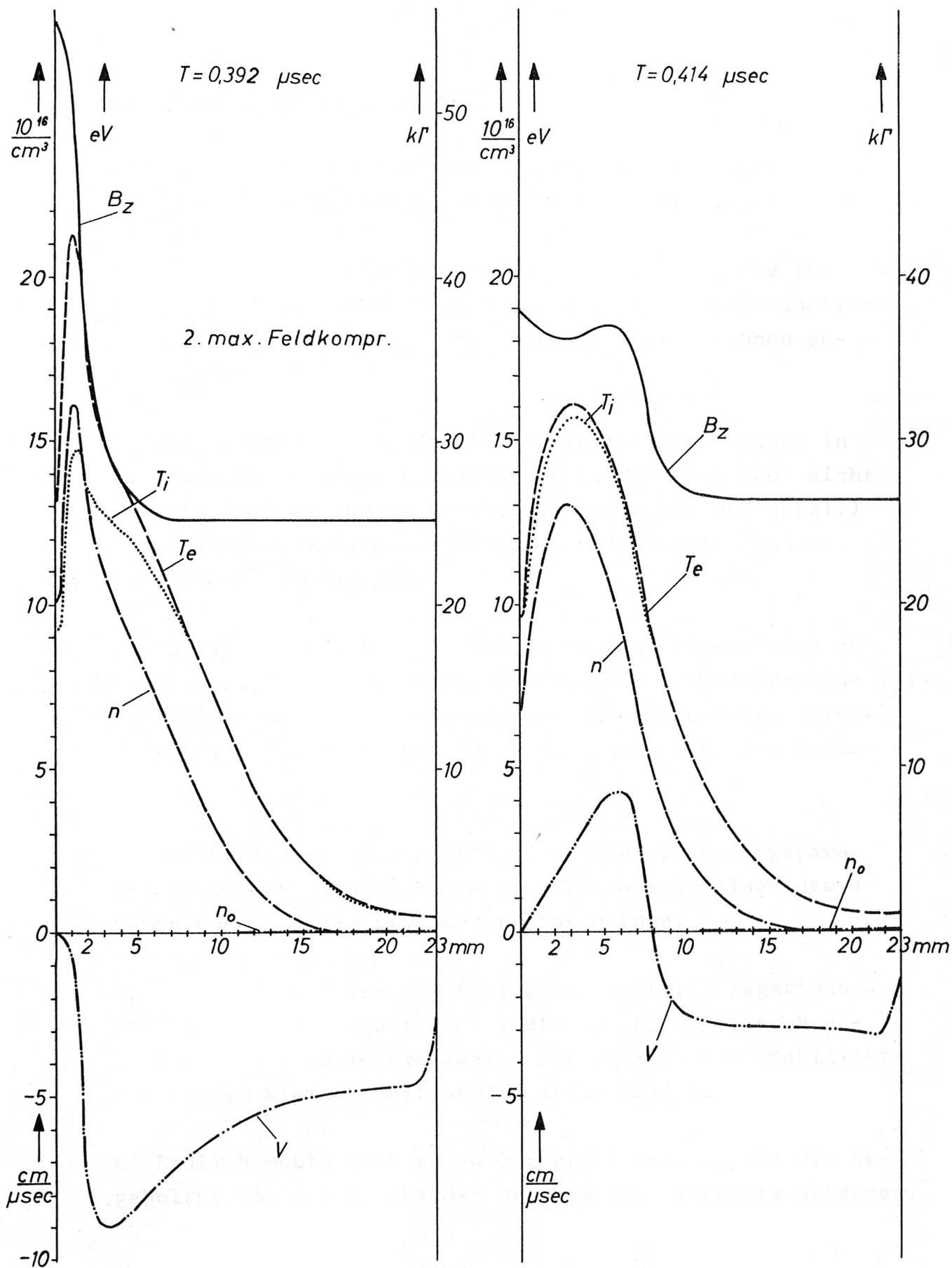


Abb. 26

## E) Einige noch offene Probleme

Der Wert der vorhergehenden Ergebnisse ist eingeschränkt durch verschiedene noch offene Probleme:

1. Es fehlt jede Abschätzung über die Fehler, die infolge der numerischen Annäherung der Differentialquotienten oder durch das Auf- bzw. Abrunden beim Rechnen gemacht werden.
2. Die Berechnung der Koeffizienten ist - wie schon in B, V erwähnt - verhältnismäßig grob. Es wurde noch nicht geprüft, welche Parameter (Stoßquerschnitte und dergl.) die Ergebnisse stark beeinflussen und deshalb genauer bestimmt werden sollten.
3. Zum vollen Verständnis der gewonnenen Kurven wäre es notwendig, die Funktionswerte (z.B. die Ionentemperatur  $T_i$ ) aufzulösen nach den Beiträgen der Phänomene (z.B. Wärmeleitung, Austauschraten usw.), aus denen sie sich zusammensetzen.
4. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von den Anfangsparametern (Druck, Ionisierungsgrad, Thetapinchanlage usw.) müßte noch systematisch untersucht werden.
5. Für gewisse Sätze von Anfangswerten (z.B. negatives - antiparalleles- Magnetfeld) läuft das Programm noch unbefriedigend. So ist teilweise zur numerischen Stabilität ein extrem kleiner Zeitschritt erforderlich.
6. Endlich müßte noch genauer geprüft werden, wie die Ergebnisse von der Anzahl der Ortskoordinatenpunkte abhängen.

Literatur:

- [1] R. Chodura u. M. Keilhacker, "Der Energiegewinn von Elektronen und die durch sie erzeugte harte Röntgenstrahlung bei Thetapinch-Entladungen vor der Zündung", Z.f.Naturforsch. 17a, 977-989 (1962)
- [2] A. Eberhagen u. M. Keilhacker, "Radial- and timeresolved measurements of the emission from neutral hydrogen in a  $\theta$ -pinch",  
Vortrag auf der VI. Int. Konf. über ionisierte Gase, Paris (1963)
- [3] W. Köppendörfer, "Induktionsspulen als Meßelemente an schnellen, stromstarken Gasentladungen",  
IPP-Bericht 1/2 (1961)
- [4] K. Hain, "Pinch Collapse", AERE Report R 3383 (1961)
- [5] Chapman u. Cowling, "The Math. Theory of Non-Uniform Gases", Kap. 3, S. 46 ff
- [6] A. Schlüter, "Dynamik des Plasmas"  
Z.f.Naturforsch. 5a, 72 (1950)
- [7] Delcroix, "Introduction to the Theory of Ionized Gases",  
S. 8
- [8] R.D. Present, "Kinetic Theory of Gases", S. 108 ff,  
McGraw-Hill Book Comp., Inc. (1958)
- [9] siehe [5], S. 182
- [10] A. Unsöld, "Physik der Sternatmosphären", S. 656,  
Springer Verlag (1955)
- [11] V.I. Kogan, J. Nucl. Energy II, 1959, Vol. 9, p. 140,  
(1954)

- [12] McWhirter, Nature, Vol. 190, S. 902 (1961)
- [13] A.M. Cravath, Phys. Rev. 36, 348 (1930)
- [14] L. Spitzer, jr., "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience, S. 80 (1956)
- [15] siehe [14], S. 21
- [16] siehe [10], S. 595
- [17] Handbuch der Physik XII, S. Flügge, Gasentladungen II, Finkelburg und Maecker, S. 347
- [18] J. Jeans, "The Dynamical Theory of Gases", S. 265
- [19] R.D. Richtmyer, "Difference Methods of Initial-Value Problems", S. 194
- [20] siehe [19], S. 209 ff
- [21] K. Hain, G. Hain, K.V. Roberts, S.J. Roberts, W. Köp- pendörfer, "Fully Ionized Pinch Collapse", Z.f.Naturforsch. 15a, 1039 (1960)
- [22] siehe [19], S. 101 ff
- [23] K. Hain, A.C. Kolb, "Fast Theta Pinch", Nucl. Fusion, Suppl. Part 2, S. 561 (1962)
- [24] H. Fisser, J. Schlüter, "A Comparison between Numerical Calculations of a Linear z-Pinch Discharge and Measure- ments by Magnetic Probes" Nucl. Fusion, Suppl. Part 2, S. 571 (1962)
- [25] siehe [19], S. 195 ff
- [26] Niblett and Fisher, "Numerical Calculations on Reversed Field Heating in the Thetatron", CLM-R-19 (1962)